МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра алгебры и геометрии

КОМБИНАТОРИКА

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве электронных методических указаний*

Составитель канд. физ.-мат. наук М.В. Игнатьев

Самара
Издательство «Самарский университет»
2013

УДК 519.1
ББК 22.143
И 27

Рецензент
д-р физ.-мат. наук, доц. Л.В. Кучма

Комбинаторика [Электронный ресурс] : методические указания / сост. М. В. Игнатьев. — Электронные методические указания. — Самара : Изд-во «Самарский университет», 2013. — 21 с. — Режим доступа: http://weblib.samsu.ru/localsrc/ssupress/main.php, ограниченный. — Загл. с экрана.

Предлагаемые методические указания соответствуют программе курсов, читаемых на механико-математическом факультете СамГУ студентам направлений «Математика» (курс «Дискретная математика и математическая логика»), «Механика и математическое моделирование» (курс «Дискретная математика»), «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» (курс «Методы комбинаторики») и специальности «Фундаментальная математика и механика» (курс «Дискретная математика»). Имеются задачи по следующим темам: метод математической индукции, алгебра множеств, бинарные отношения, числа сочетаний и размещений, мультимножества, числа Стирлинга, числа Каталана, числа Фибоначчи, рекуррентные уравнения, производящие функции, теория графов. Имеются также более сложные задания для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для студентов математических направлений и специальностей, изучающих дискретную математику и комбинаторику.

УДК 519.1
ББК 22.143

Предисловие

Как известно, любая серьёзная математическая проблема есть, в конечном счёте, проблема *классификации* тех или иных объектов, а главная трудность обычно заключается в изобретении адекватного *языка*, адекватных терминов, в которых искомая классификация должна быть дана. В то же время, удачная система терминов обычно позволяет продвинуться в решении поставленных задач гораздо дальше, чем предполагалось. (Ярчайшими примерами здесь являются таблицы Юнга и диаграммы Дынкина — и те, и другие классифицируют, пожалуй, не один *десяток* математических конструкций: представления симметрической и полной линейной группы, простые алгебры Ли, простые алгебраические группы, особенности волновых фронтов...)

В самом широком смысле комбинаторика (а точнее, *перечислительная* комбинаторика) и есть набор разнообразных методов, приспособленных для классификации математических объектов той или иной природы. Статус комбинаторики как *единой науки* до сих пор вызывает самые оживленные дискуссии, но систематическое использование комбинаторных *методов* в алгебре, геометрии, анализе очень часто приводит к первоклассным результатам — тем важнее изучить основы комбинаторики в самом начале математического образования студентов.

Пособие рассчитано, в первую очередь, на первокурсников математических специальностей и направлений и полностью соответствует программам курсов дискретной математики, читаемых в Самарском университете. Сначала мы приводим задачи, связанные с такими абсолютно классическими вещами, как множества и отображения, формулы включений и исключений и бинарные отношения, а затем рассматриваем не менее традиционные комбинаторные объекты и принципы (числа сочетаний и размещений, биномиальные и мультиномиальные формулы, числа Стирлинга, Каталана и Фибоначчи, рекуррентные уравнения). Кульминацией курса является изложение основ теории производящих функций — наиболее мощного из всех современных методов перечислительной комбинаторики. Последний раздел посвящён элементам теории графов.

Пособие до известной степени опирается на учебник [Fr]. Конечно, студенту, желающему по-настоящему разобраться в комбинаторике, ни в коем случае нельзя ограничиваться лекционными курсами — тем более, что некоторые её главы чрезвычайно красивы и увлекательны сами по себе, безотносительно к возможным приложениям. Классическое изложение элементарных комбинаторных методов можно найти в [Vi]; книги [Ev1] и [Ev2] содержат чёткое и подробное введение во многие области дискретной математики и теории графов. Весьма полезное обсуждение алгоритмической реализации множества комбинаторных объектов имеется в [Ok]. Мы горячо рекомендуем всем *великолепную* книгу [GKP], в которой комбинаторика предстаёт невероятно эффективным орудием решения самых разнообразных алгебраических и геометрических проблем.

На более высоком уровне комбинаторные аспекты алгебры освещаются в фундаментальном учебнике [St] — разумеется, *не* предназначенном для первого знакомства с предметом. (Отдельного восхищения заслуживает глава про «каталановую болезнь», в которой собрано несколько *сотен* интерпретаций знаменитых чисел Каталана; см. по этому поводу также статью [Do]). Наконец, очень понятное и быстрое введение в теорию производящих функций приведено в [La]. Все эти книги мы непременно советуем прочесть (пусть не сразу!) тем, кто действительно хочет овладеть современными комбинаторными и алгоритмическими методами.

Многие из разделов пособия, само их расположение и стиль подвергались неоднократному изменению и уточнению, пока автор читал в 2010 году курс дискретной математики первокурсникам-математикам. Я выражаю глубокую благодарность Дмитрию Елисееву и Марии Стригун, моим коллегам, которые, посещая эти лекции, постоянно вдохновляли меня на всё новые и новые изменения в читаемом курсе. Я также весьма признателен Сергею Юрьевичу Попову, который, в свою очередь, читал курс дискретной математики мне — тогда первокурснику. Наконец, я хочу выразить искреннюю благодарность Владимиру Доценко, который на летней школе в Дубне в 2005 году познакомил меня с одним из моих любимых теперь комбинаторных сюжетов — теорией так называемых *квантовых аналогов* (очень кратко её основы изложены в четвёртом разделе).

М.В. Игнатьев, 1 февраля 2011 г.

1. Метод математической индукции

Докажите следующие тождества для произвольного натурального n.

1.1. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

1.2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1.3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.4. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

1.5. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

1.6*. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

Докажите следующие неравенства.

1.7. $2^n > (1-x)^n + (1+x)^n$ при $0 < x < 1$ и $n \geqslant 2$.

1.8. (*Неравенство Бернулли*) $(1+x)^n > 1 + nx$ при всех $n \geqslant 2$ и $x > 0$.

1.9. $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ раз}} < 2$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

1.10*. $3^n > n^3$ при любом $n \geqslant 4$.

Докажите следующие утверждения.

1.11. При любом натуральном n число $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

1.12. При любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

1.13. Пусть $a_1 = 2$ и $a_n = 5a_{n-1} - 1$ для любого $n \geqslant 2$. Тогда

$$a_n = \frac{7 \cdot 5^{n-1} + 1}{4} \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

1.14. Пусть $a_1 = 4$ и $a_n = 2a_{n-1} - 3$ для любого $n \geqslant 2$. Тогда $a_n = 2^{n-1} + 3$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

1.15. Пусть $a_1 = 4$, $a_2 = 12$ и $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ для любого $n \geqslant 3$. Тогда

$$a_n = (n+1) \cdot 2^n \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

1.16. Пусть $a_1 = 2$, $a_2 = 16$ и $a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$ для любого $n \geqslant 3$. Тогда

$$a_n = 5^n - 3^n \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

1.17*. Пусть $a_1 = \cos\varphi$, $a_2 = \cos 2\varphi$ для какого-то угла φ и $a_n = 2a_{n-1} \cdot \cos\varphi - a_{n-2}$ для любого $n \geqslant 3$. Тогда

$$a_n = \cos n\varphi \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

1.18. Сумма углов выпуклого n-угольника ($n \geqslant 3$) равна $(n-2) \cdot \pi$.

1.19*. $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ раз}} = 2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

1.20*. (*Ханойские башни*) Даны три стержня, стоящие в ряд. На один из них нанизаны n дисков; нижний — самый большой, следующий — поменьше, и так далее (верхний — самый маленький). Разрешается перекладывать любой лежащий сверху диск, при этом запрещается класть больший диск на меньший. Нужно переложить все диски на другой стержень. Покажите, что минимальное количество перекладываний, за которое можно это сделать, равно $2^n - 1$.

2. Множества и подмножества. Формула включений и исключений

Докажите следующие утверждения для любых множеств $A, B, C, D \subset U$.

2.1. а) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$.
б) $A \cup B \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
г) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
д) $A \triangle (A \triangle B) = B$.
е) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
ё) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
ж)* $(A \cup B) \triangle (C \cup D) \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$.

2.2. а) $A \subset B \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup C$.
б) $A \subset B \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap C$.
в) $A \subset B \Longrightarrow C \setminus B \subset C \setminus A$.
г) $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow A \triangle B = A \cup B$.
д)* $A \triangle B = C \Longleftrightarrow B \triangle C = A \Longleftrightarrow C \triangle A = B$.

2.3. а) $A \subset B, C \subset D \Longleftrightarrow A \times C \subset B \times D$.
б) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
в) $(A \cup B) \times (C \cup D) \subset (A \times C) \cup (B \times D)$.
г) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
д) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.
е)* $|A \times B| = |B \times A|$.

2.4. Пусть $A = \{1, 2, \ldots, 2010\}$ и

$$P_1 = \{a \in A \mid a \text{ кратно трём}\},\ P_2 = \{a \in A \mid a \text{ кратно пяти}\},$$
$$P_3 = \{a \in A \mid a \geqslant 1000\},\ P_3 = \{a \in A \mid a \leqslant 2000\}$$

Сколько элементов множества A лежит ровно в а) двух б) трёх из этих подмножеств?

2.5. Пусть $A = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ и

$$P_1 = \{a \in A \mid a \text{ кратно двум}\},\ P_2 = \{a \in A \mid a \text{ кратно трём}\},$$
$$P_3 = \{a \in A \mid a \geqslant 500\},\ P_3 = \{a \in A \mid a \leqslant 700\}$$

Сколько элементов множества A лежит ровно в а) двух б) трёх из этих подмножеств?

2.6. Среди студентов первого курса механико-математического факультета СамГУ 80% нравится алгебра, 50% — геометрия, 50% — дискретная математика, 30% — и алгебра, и геометрия, 20% — и геометрия, и дискретная математика, 40% — и алгебра, и дискретная математика, 10% — все эти три предмета. Скольким процентам студентов а) не нравится ни один из этих предметов? б) нравится в точности два из этих предметов?

2.7. Среди 14 студентов первого курса механико-математического факультета СамГУ каждый знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро — итальянский, семеро — китайский, пятеро знают английский и итальянский, четверо — английский и китайский, трое — итальянский и китайский. Сколько человек знает а) все три языка? б) ровно два языка? в) ровно один язык?

2.8. а) Сколько существует трёхзначных чисел, не делящихся ни на пять, ни на семь? б) Сколько существует четырёхзначных чисел, не делящихся ни на четыре, ни на девять?

2.9*. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на различные простые множители, $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Докажите, что

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

3. Бинарные отношения

3.1. Проверьте, что бинарное отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве X. В пунктах а)–з) опишите фактор-множество, а также постройте какую-нибудь полную систему представителей классов эквивалентности.

а) $X = E^2$ — плоскость, $A \sim B$, если они находятся на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной точки $O \in X$.

б) $X = E^2$ — плоскость, $A \sim B$, если они находятся на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной прямой $l \subset X$.

в) $X = E^3$ — трёхмерное пространство, $A \sim B$, если они находятся на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной точки $O \in X$.

г) $X = E^3$ — трёхмерное пространство, $A \sim B$, если они находятся на одинаковом расстоянии от некоторой фиксированной плоскости $\alpha \subset X$.

д) $X = \mathbb{R}$, $a \sim b$, если $\{a\} = \{b\}$.

е) $X = \mathbb{R}$, $a \sim b$, если $[a] = [b]$.

ё) X — множество векторов на плоскости E^2, начинающихся в начале координат O, $\bar{x} \sim \bar{y}$, если вектор $\bar{x} - \bar{y}$ параллелен некоторой фиксированной прямой $l \subset E^2$, проходящей через O.

ж) X — множество векторов в пространстве E^3, начинающихся в начале координат O, $\bar{x} \sim \bar{y}$, если вектор $\bar{x} - \bar{y}$ параллелен некоторой фиксированной прямой $l \subset E^3$, проходящей через O.

з) $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ — множество квадратных матриц порядка n (с вещественными коэффициентами), $A \sim B$, если $\det A = \det B$.

и) $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $A \sim B$, если существует такая матрица C, что $A = CB$ и $\det C = 1$.

й) $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $A \sim B$, если существует такая диагональная матрица C, что $A = BC$.

к)* $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $A \sim B$, если существует такая невырожденная матрица T, что $A = TBT^{-1}$.

л)* $X = S_n$ — множество подстановок на n элементах, $\sigma \sim \tau$, если существует такая подстановка $w \in S_n$, что $\sigma = w\tau w^{-1}$.

3.2. Проверьте, что бинарное отношение $\prec$ является отношением частичного порядка на множестве X, постройте диаграмму Хассе.

а) X — множество натуральных делителей числа 36, $x \prec y$, если $x \mid y$.

б) X — множество натуральных делителей числа 54, $x \prec y$, если $x \mid y$.

в) $X = 2^{\{a,b\}}$ — множество подмножеств двухэлементного множества $\{a, b\}$, $A \prec B$, если $A \subset B$.

г) $X = 2^{\{a,b,c\}}$ — множество подмножеств трёхэлементного множества $\{a, b, c\}$, $A \prec B$, если $A \subset B$.
д) $X = \{a, b, c, d\}$ и
$\prec = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (b, c), (c, d), (a, d), (b, d)\}$.
е) $X = \{a, b, c, d\}$ и
$\prec = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (a, c), (c, d), (a, d), (b, d)\}$.
ё) $X = S_3$ — множество подстановок на трёх элементах, $\sigma \prec \tau$, если $l(\sigma) \leqslant l(\tau)$, где $l(\sigma)$ — число инверсий в подстановке σ.
ж) $X = S_4$ — множество подстановок на четырёх элементах, $\sigma \prec \tau$, если $l(\sigma) \leqslant l(\tau)$.
з)* X — множество подстрок строки «колокол» (к примеру, «кол» $\in X$, а «кок» $\notin X$), $s \prec t$, если s является фрагментом t.

3.3. Исследуйте бинарное отношение R на множестве X на рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность.
а) $X = \mathbb{Z}$, xRy, если $x \mid y$.
б) $X = \mathbb{R}$, xRy, если $x \neq y$.
в) X — множество всех людей, xRy, если x и y — брат и сестра.
г) $X = \{a, b, c, d\}$ и $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$.
д) $X = \{a, b, c, d\}$ и $R = \{(b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (b, c), (c, d), (a, d), (b, d)\}$.
е) $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, ARB, если AB — вырожденная матрица.
ж)* $X = [1, +\infty)$, xRy, если

$$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{y}{y^2+1}.$$

4. Числа сочетаний и размещений

Докажите следующие тождества для любых целых неотрицательных k, m, n и r, для которых все используемые в задаче числа корректно определены.

4.1. а) $\dbinom{n}{k} \cdot \dbinom{k}{m} = \dbinom{n-m}{k-m} \cdot \dbinom{n}{m}$.

б) $\dbinom{n+1}{k} \Big/ \dbinom{n}{k} = \dfrac{n+1}{n-k+1}$.

4.2. а) $\dbinom{n}{k-m} \Big/ \dbinom{n}{k} = \dfrac{(k)_m}{(n-k+m)_m}$.

б) $\dbinom{n-m}{k-m} \Big/ \dbinom{n}{k} = \dfrac{(k)_m}{(n)_m}$.

4.3. а) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

б) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot \binom{n}{k} = 0$.

в) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} = n \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}$.

г) $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-2} k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} = 0$.

4.4. а) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1} \cdot \binom{n}{k} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} \cdot \binom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}$.

4.5. а) $\sum\limits_{k=0}^{n} (2k+1) \cdot \binom{n}{k} = (n+1) \cdot 2^{n}$.

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} = n \cdot (n+1) \cdot 2^{n-2}$.

4.6. а) $n \cdot (n)_k = (n)_{k+1} + k \cdot (n)_k$.

б) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (k)_m = \dfrac{(n)_{m+1}}{m+1}$.

4.7. а) $\sum\limits_{m=k-1}^{n-1} \binom{m}{k-1} = \binom{n}{k}$.

б) $\sum\limits_{r=0}^{k} \binom{n}{r} \cdot \binom{m}{k-r} = \binom{n+m}{k}$.

в) $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$.

г) $\sum\limits_{r=0}^{m} \binom{n+r}{k} = \binom{n+m+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$.

4.8*. (*Квантовые аналоги*) Для любых $q \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим $[n] = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$, $[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \ldots \cdot [n]$, $[n]_k = \dfrac{[n]!}{[n-k]!}$ и

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]! \cdot [n-k]!}.$$

Докажите:

а) $[n] = [k] + q^k \cdot [n-k] = [n-k] + q^{n-k} \cdot [k]$.

б) $[n] \cdot [n]_k = [n]_{k+1} + q^{n-k} \cdot [k] \cdot [n]_k$.

в) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = q^k \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$.

г) $[x+y]^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^{k(k-1)2} \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot x^{n-k} y^k$, где
$[x+y]^n = (x+y) \cdot (x+qy) \cdot \ldots \cdot (x+q^{n-1}y)$.

д) $\sum\limits_{k=0}^{m} q^k \cdot \begin{bmatrix} n+k \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+m+1 \\ n+1 \end{bmatrix}$.

е) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} [k]_m = q^{m+1} \cdot \dfrac{[n]_{m+1}}{[m+1]}$.

4.9*. Покажите, что $2^n \leqslant \dbinom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

4.10. Сколько существует четырёхзначных чисел, у которых каждая следующая цифра
а) больше б) меньше предыдущей?

4.11. Никакие три диагонали выпуклого а) восьмиугольника б) девятиугольника не пересекаются в одной точке. На сколько отрезков все они вместе делятся точками пересечения?

4.12. Найдите n, если известно, что в разложении $(x+1)^n$ равны коэффициенты а) при x^5 и x^{12} б) при x^6 и x^9.

4.13*. Докажите, что если p — простое число, то все $\dbinom{p}{k}$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, делятся на p.

5. Основные комбинаторные принципы. Мультимножества

5.1. Сколько различных натуральных делителей, включая единицу и само себя, имеет число а) $3^5 \cdot 5^4$ б) $4^5 \cdot 6^3$ в) $2^7 \cdot 11^3 \cdot 10^4$ г) $3^3 \cdot 4^4 \cdot 5^5 \cdot 6^6$?

5.2. Сколько существует а) пятизначных чисел, у которых все цифры нечётные; б) четырёхзначных чисел, у которых все цифры чётные; в) шестизначных чисел, у которых все цифры кратны трём?

5.3. а) В группе пять студентов изучают английский язык, семь студентов — китайский, десять — суахили. Сколькими способами можно выбрать двух студентов, изучающих разные языки? б) За контрольную по дискретной математике в группе трое получили тройки, четверо — четвёрки, семнадцать человек — пятёрки. Сколькими способами можно выбрать двоих, получивших разные оценки?

5.4. а) Сколько существует перестановок чисел 1, 2, 3, 4, в которых 2 следует не ранее 1? б) Сколько существует перестановок чисел 1, 2, 3, 4, 5, в которых 4 следует не позже 1? в) Сколько существует перестановок чисел 1, …, 7, в которых 5 не остаётся на месте? г) Сколько существует перестановок чисел 1, …, 8, в которых 6 остаётся на месте?

5.5. а) В буфете продаётся 4 сорта пирожных. Сколько существует вариантов выбрать 7 пирожных? б) В магазине продаётся 5 видов карандашей. Сколько существует вариантов выбрать 8 карандашей?

5.6. а) Сколько разложений числа 19 можно составить из чисел 2 и 3? б) Сколько разложений числа 20 можно составить из чисел 3 и 4? в) Сколько разложений числа 18 можно составить из чисел 4, 6 и 10? г) Сколько разложений числа 21 можно составить из чисел 4, 7 и 10?

5.7. Сколько перестановок можно составить из букв слова а) «кок» б) «мама» в) «канкан» г) «матан» д) «олово» е) «математика»?

5.8. Сколькими способами можно разделить 15 друзей «ВКонтакте» по трём группам так, чтобы а) в первую группу попало 4 друга, во вторую — 5, в третью — 6? б) в первую группу попало 5 друзей, во вторую — 7, в третью — 3?

5.9. а) Найдите в разложении $(x + y + z)^7$ коэффициент при $x^2y^3z^2$. б) Найдите в разложении $(x+y+z+t)^5$ коэффициент при x^2yzt. а) Найдите в разложении $(1 + x + y)^8$ коэффициент при x^2y^3. г) Найдите в разложении $(x + y + z + t)^6$ коэффициент при xy^2zt^2.

5.10. Сколько существует биекций и инъекций из множества A в множество B, если а) $|A| = 5$, $|B| = 7$ б) $|A| = 6$, $|B| = 6$ в) $|A| = 9$, $|B| = 4$ г) $|A| = 4$, $|B| = 8$ д) $|A| = 7$, $|B| = 7$ е) $|A| = 10$, $|B| = 5$?

5.11. а) Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $x + y + z = 2010$? в) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x + y + z + t = 15$? в) Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет неравенство $x + y + z + t + w \leqslant 10$?

5.12*. Докажите, что следующие числа — целые: а) $(k!)!/(k!)^{(k-1)!}$ б) $(2n)!/2^n$ в) $(3n)!/6^n$.

5.13*. Покажите, что $\sum\limits_{i+j+k=n} P_n(i, j, k) = 3^n$.

5.14*. а) Найдите коэффициент при $x^k y^l$ в разложении $(1+x+y)^n$. б) Найдите коэффициенты при x^{17} и x^{18} в разложении $(1+x^5+x^7)^n$.

5.15*. Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство $|x|+|y|<100$?

5.16*. Сколькими различными способами можно представить миллион в виде произведения трёх натуральных чисел? (Произведения, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются одинаковыми.)

5.17*. (*Биномиальная формула обращения*) Пусть заданы произвольные отображение $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Покажите, что следующие условия равносильны: а) $g(n) = \sum_k (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot f(k)$ для любого $n\in\mathbb{N}$; б) $f(n) = \sum_k (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot g(k)$ для любого $n\in\mathbb{N}$.

6. Числа Стирлинга и Каталана

6.1. а) Пусть $\left\{{10 \atop 7}\right\} = \alpha$, $\left\{{10 \atop 6}\right\} = \beta$. Выразите $\left\{{11 \atop 7}\right\}$ через α и β. б) Пусть $\left\{{2010 \atop 7}\right\} = \alpha$, $\left\{{2010 \atop 6}\right\} = \beta$. Выразите $\left\{{2011 \atop 7}\right\}$ через α и β. в) Пусть $\left\langle{10 \atop 7}\right\rangle = \alpha$, $\left\langle{10 \atop 6}\right\rangle = \beta$. Выразите $\left\langle{11 \atop 7}\right\rangle$ через α и β. г) Пусть $\left\langle{2010 \atop 7}\right\rangle = \alpha$, $\left\langle{2010 \atop 6}\right\rangle = \beta$. Выразите $\left\langle{2011 \atop 7}\right\rangle$ через α и β.

6.2. а) Найдите коэффициент при x^2 в $(x)_4$. б) Найдите коэффициент при x^3 в $(x)_5$. в) Найдите коэффициент при x^2 в $(x)^4$. г) Найдите коэффициент при x^3 в $(x)^5$. д) Найдите коэффициент при $(x)_2$ в x^4. е) Найдите коэффициент при $(x)_3$ в x^5. ё) Найдите коэффициент при $(x)^2$ в x^4. ж) Найдите коэффициент при $(x)^3$ в x^5.

6.3. Пусть A (соответственно B) — квадратная матрица размера $n\times n$, (i,j)-ый элемент которой равен $\left\{{i \atop j}\right\}$ (соответственно $(-1)^{i-j}\left\langle{i \atop j}\right\rangle$). Докажите, что $A = B^{-1}$ при а) $n=2$ б) $n=3$ в) $n=4$ г)* при всех n.

6.4. Докажите тождества: а) $\left\{{n+1 \atop m+1}\right\} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{{k \atop m}\right\}$,

б) $\left\langle{n+1 \atop m+1}\right\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} \left\langle{n \atop k}\right\rangle \binom{k}{m}$.

6.5. Сколько существует сюръекций из множества A в множество B, если а) $|A| = 7$, $|B| = 5$ б) $|A| = 6$, $|B| = 4$ в) $|A| = 5$, $|B| = 5$?

6.6. Докажите, что количество следующих объектов равно n-ому числу Каталана c_n. Явно перечислите все эти объекты при $n = 3$ и $n = 4$.

а) Последовательности длины $2n$, в которых по n раз встречаются числа один и минус один и все частичные суммы неотрицательны.

б) Последовательности натуральных чисел $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $a_i \leqslant i$.

в) Способы соединить $n+1$ точек на прямой n непересекающимися дугами так, чтобы не было циклов и из каждой точки дуги выходили только влево или только вправо.

г) Пути на клетчатой бумаге по границам клеточек из точки $(0,0)$ в точку (n,n), не поднимающиеся выше прямой $y = x$.

д) Перестановки чисел $1, 2, \ldots, 2n$ такие, что все чётные числа встречаются в порядке возрастания, все нечётные — тоже в порядке возрастания, причём для каждого k от 1 до n число $2k - 1$ встречается раньше, чем $2k$.

е) *Параллеломино* (пары путей на клетчатой бумаге по границам клеточек с началом в точке $(0,0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n+2$.

ё) Пути на клетчатой бумаге по границам клеточек с началом в точке $(0,0)$, идущие вправо или вверх, не поднимающиеся выше прямой $y = x$, в которых ровно $n - 1$ единичных шагов вправо.

ж) Плоские корневые *строго двоичные* деревья (у каждой вершины либо два сына, либо ни одного) с $n + 1$ листьями.

з) Плоские корневые деревья с $n + 1$ вершинами.

и) Способы соединить $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами.

6.7*. Докажите, что количество следующих объектов равно n-ому числу Каталана c_n (явно перечислите все эти объекты при $n = 3$ и $n = 4$).

а) Пары (u, v) перестановок чисел $1, \ldots, n$ такие, что суммарное число независимых циклов (включая единичные) u и v равно $n+1$ и $uv = (1, \ldots, n)$.

б) *Диаграммы Юнга* (если кто-то вдруг знает, что это такое), содержащиеся в диаграмме $(n-1, n-2, \ldots, 1)$.

в) Симметричные и рефлексивные бинарные отношения R на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, удовлетворяющие условию: если $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ и iRk, то iRj и jRk.

7. Рекуррентные уравнения. Числа Фибоначчи

7.1. Найдите явный вид n-ого члена последовательности, заданной рекуррентно.

а) $a_1 = 2$, $a_2 = 16$ и $a_n = 8a_{n-1} - 15a_{n-2}$ для любого $n \geqslant 3$.

б) $a_1 = 4$, $a_2 = 12$ и $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ для любого $n \geqslant 3$.

в) $a_1 = 2$ и $a_n = 5a_{n-1} - 1$ для любого $n \geqslant 2$.

г) $a_1 = 4$ и $a_n = 2a_{n-1} - 3$ для любого $n \geqslant 2$.

д) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ для любого $n \geqslant 3$.

е) $a_1 = 3$, $a_2 = -1$ и $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}$ для любого $n \geqslant 3$.

ё) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$ и $a_n = -10a_{n-1} - 32a_{n-2} - 32a_{n-3}$ для любого $n \geqslant 4$.

ж) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$ и $a_n = -3a_{n-1} + a_{n-2} - 3a_{n-3}$ для любого $n \geqslant 4$.

з)* $a_1 = z$ и $a_n = xa_{n-1} + y$ для любого $n \geqslant 2$ (x, y, z — какие-то фиксированные числа).

и)* $a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + n$ для любого $n \geqslant 2$.

й)* $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ и $a_n = a_{n-2} + n$ для любого $n \geqslant 2$.

к)* $a_1 = x$, $a_2 = y$, $a_3 = z$ и $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ для любого $n \geqslant 4$ (x, y, z — какие-то фиксированные числа).

7.2*. Пусть $0 \leqslant t \leqslant k - 1$ и $a_n = n^t$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \binom{k}{i} \cdot a_{n+k-i} = 0.$$

7.3. Найдите трёхдиагональные определители $D_n(a, b, c)$, где n — порядок определителя, a — число на главной диагонали, b — над ней, а c — под ней: а) $D_n(2, 1, 1)$; б) $D_n(3, 2, 1)$; в) $D_n(7, 5, 2)$; г) $D_n(5, 3, 2)$; д) $D_n(9, 5, 4)$; е) $D_n(0, 1, -1)$.

7.4*. Вычислите определитель $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{vmatrix}$$ (матрица имеет размер $n \times n$).

7.5. Докажите следующие факты про числа Фибоначчи (m, n, k везде обозначают произвольные натуральные числа или нуль).

а) Числа F_n и F_{n+1} взаимно просты.

б) $F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$.

в) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

г) $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

д) $F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

е) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_nF_{n+1}$.

ё) $F_nF_{n+2} + (-1)^n = F_{n+1}^2$.

ж) $\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots = F_n$.

7.6*. Докажите следующие факты про числа Фибоначчи (m, n, k везде обозначают произвольные натуральные числа или нуль).

а) Если НОД$(m, n) = d$, то НОД$(F_m, F_n) = F_d$.

б) Если $m > 2$, то F_n делится на F_m тогда и только тогда, когда n делится на m.

в) («*Фибоначчиева система счисления*») Любое натуральное число N можно единственным образом представить в виде суммы m чисел Фибоначчи $N = F_{k_1} + F_{k_2} + \ldots + F_{k_m}$ для некоторого m, где $k_1 > k_2 + 1$, $k_2 > k_3 + 1$, …, $k_{m-1} > k_m + 1$, $k_m > 1$.

8. Производящие функции

8.1. Докажите следующие тождества (сначала сравните несколько первых коэффициентов; скажем, до $n \leqslant 4$; в задачах со звёздочкой можно этим и ограничиться):

а) $\sin^2 s + \cos^2 s = 1$.

б) $(1+s)^\alpha \cdot (1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.

в) $e^s \cdot e^{-s} = 1$.

г) $e^{\alpha s} \cdot e^{\beta s} = e^{(\alpha+\beta)s}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

д)* $\ln(1+s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} s^n$.

е)* $(1+s)^\alpha \cdot (1+s)^\beta = (1+s)^{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

ё)* $\exp\left(\ln(1-s)^{-1}\right) = (1-s)^{-1}$.

ж)* $(e^s - 1)^m = m! \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \dfrac{s^n}{n!}$.

з)* $\left(\ln(1-s)^{-1}\right)^m = m! \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\langle {n \atop m} \right\rangle \dfrac{s^n}{n!}$.

8.2. Пользуясь свойствами дифференцирования, найдите производящие функции следующих последовательностей:

а) 1, 2, 3, … (то есть $a_n = n + 1$).

б) $1 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 4$, … (то есть $a_n = (n+1) \cdot (n+2)$).

в) 1^2, 2^2, 3^2, … (то есть $a_n = (n+1)^2$).

8.3. Найдите производящую функцию для последовательностей 7.1 а), в), г), д) и с помощью элементарных дробей ещё раз найдите выражения для n-ых членов этих последовательностей в замкнутом виде.

8.4. Рассматривая производящую функцию для чисел Фибоначчи, ещё раз докажите тождества 7.5 в)–е).

8.5*. а) Покажите, что если производящие функции $A(s)$ и $B(s)$ отличны от нуля, то и $A(s)B(s)$ отлична от нуля. б) Докажите, что не существует такой производящей функции $A(s)$, что $s \cdot A(s) = 1$.

8.6. а) Докажите формулу интегрирования по частям:

$$\int (A(s)B'(s) - A'(s)B(s)) = A(s)B(s) - A(0)B(0).$$

б)* Докажите, что при $B(0) = 0$ имеет место формула замены переменных в интеграле:

$$\left(\int A\right)(B(s)) = \int (A(B(s)) \cdot B'(s)).$$

в) Докажите формулу Ньютона–Лейбница:

$$(A(s)B(s))' = A'(s)B(s) + A(s)B'(s).$$

8.7. Докажите следующие тождества (если трудно, сначала посчитайте несколько первых коэффициентов):

а) $((1+s)^\alpha)' = \alpha \cdot (1+s)^{\alpha-1}$,

$\int (1+s)^\alpha = \dfrac{(1+s)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $\alpha \neq -1$ и

$\int (1+s)^{-1} = \ln(1+s)$.

б) $(e^s)' = e^s$, $\int e^s = e^s - 1$.

в) $(\sin s)' = \cos s$, $(\cos s)' = -\sin s$,

$\int \sin s = -\cos s + 1$, $\int \cos s = \sin s$.

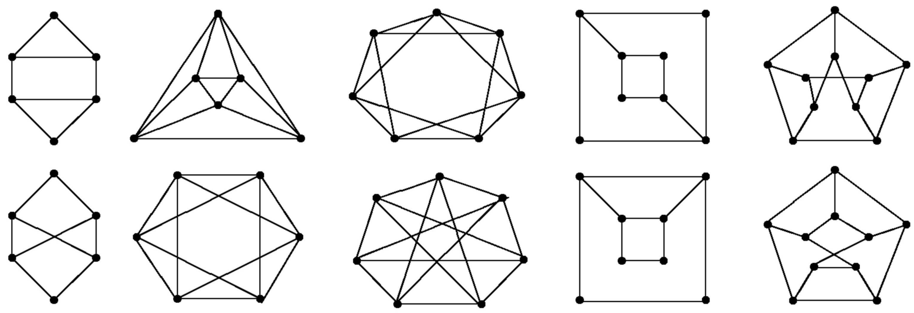
Найдите производные и интегралы от $e^{\alpha s}$, $\sin \alpha s$, $\cos \alpha s$.

9. Основы теории графов

9.1. Пусть G_n — граф с вершинами $\{v_1, \ldots, v_n\}$; вершины v_i и v_j соединены ребром тогда и только тогда, когда i и j взаимно просты. Постройте матрицы смежности и инцидентности графа G_n и нарисуйте его при а) $n = 6$, б) $n = 9$. Как связаны графы G_m и G_n при $m < n$?

9.2. Пусть G — граф с множеством вершин X из задач 3.2а)–е), x и y соединены ребром, если сравнимы. Постройте матрицы смежности и инцидентности G и нарисуйте его.

9.3. Какие из графов ниже изоморфны? Постройте их матрицы смежности и инцидентности.



9.4. Нарисуйте граф, для которого A — матрица а), б) инцидентности, в), г) смежности.

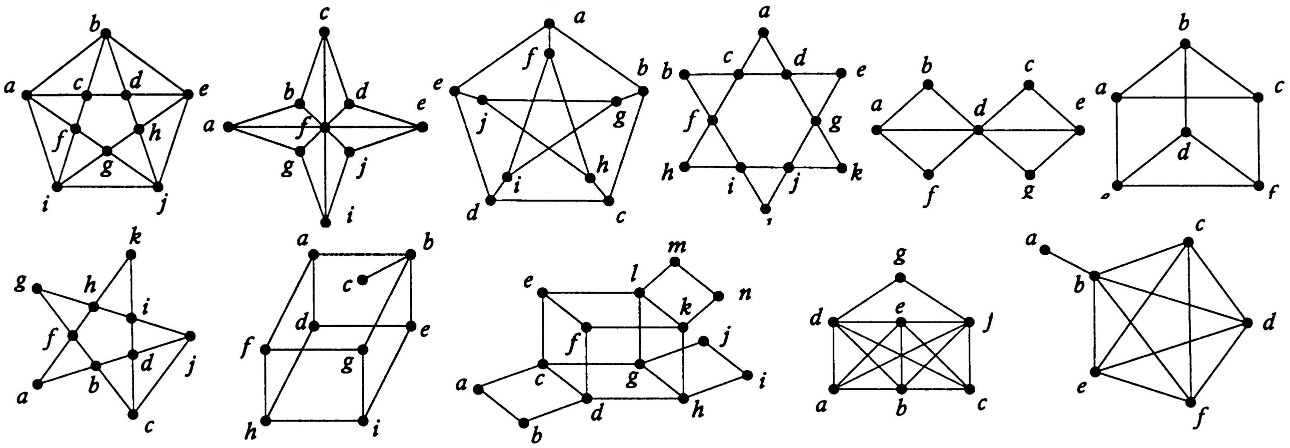
$$а)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$б)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$
\text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

9.5. Определите, какие из следующих графов имеют а) эйлеров цикл, б) эйлеров путь.



9.6***.** Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — вершины графа G, A — его матрица смежности. а) Докажите, что количество путей длины k из v_i в v_j равно (i, j)-ому элементу матрицы A^k. б) Покажите, что количество циклов длины 3 в G равно $\operatorname{tr} A^3/6$.

Список литературы

[Vi] Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. Комбинаторика. — М.: МЦНМО, 2007. — 400 с.

[Do] В.В. Доценко. Числа Каталана и естественные отображения, с. 328–360. // С.В. Иванов, К.П. Кохась, А.И. Храбров и др., сост. Петербургские олимпиады школьников по математике 2003–2005. — СПб.: Невский диалект, БХВ–Петербург, 2007. — 576 с.

[GKP] Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2009. — 703 с.

[La] С.К. Ландо. Лекции о производящих функциях. — М.: МЦНМО, 2004. — 144 с. Электронная версия доступна на странице свободно распространяемых изданий МЦНМО `http://www.mccme.ru/free-books/lando/lando-genfunc.pdf`.

[Ok] С.М. Окулов. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. — 424 с.

[St] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. — М.: Мир, 2005. — 767 с.

[Fr] И.С. Фролов. Элементы дискретной математике. Часть I. Комбинаторика. — Самара: Издательство «Самарский университет», 2000. — 50 с.

[Ev1] А.Ю. Эвнин. Дискретная математика. Конспект лекций. — Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 1998. — 176 с. Электронная версия доступна на странице Научной библиотеки ЮУрГУ `http://www.lib.susu.ac.ru/ftd?base=SUSU_METHOD&key=000150855`.

[Ev2] А.Ю. Эвнин. Задачник по дискретной математике. — Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2002. — 164 с.

Публикуется в авторской редакции.
Компьютерная верстка, макет М. В. Игнатьев.

Управление по информационно-издательской деятельности
Самарского государственного университета:
www.infopress.samsu.ru
Издательство «Самарский университет»,
443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
Тел. 8 (846) 334–54–23