ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

Занятие 1. Евклидовы пространства

1.1. Докажите, что для любых векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ произвольного евклидова пространства справедливы утверждения

a) $\big|||\overline{a}|| - ||\overline{b}||\big| \leq ||\overline{a} - \overline{b}|| \leq ||\overline{a}|| + ||\overline{b}||$;

b) $||\overline{a}|| \cdot ||\overline{b}|| = |(\overline{a}, \overline{b})| \iff$ векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы;

c) пусть $\overline{b} \neq \overline{0}$, тогда

$||\overline{a} + \overline{b}|| = ||\overline{a}|| + ||\overline{b}|| \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0:\ \overline{a} = \alpha \overline{b}$;

$||\overline{a} - \overline{b}|| = ||\overline{a}|| + ||\overline{b}|| \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \leq 0:\ \overline{a} = \alpha \overline{b}$;

$||\overline{a} - \overline{b}|| = ||\overline{a}|| - ||\overline{b}|| \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 1:\ \overline{a} = \alpha \overline{b}$.

1.2. С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис линейной оболочки:

a) $\langle (1,2,2,-1),\ (1,1,-5,3),\ (3,2,8,-7) \rangle$;

b) $\langle (1,1,-1,-2),\ (5,8,-2,-3),\ (3,9,3,8) \rangle$;

c) $\langle (2,1,3,-1),\ (7,4,3,-3),\ (1,1,-6,0),\ (5,7,7,8) \rangle$.

1.3. Дополнить до ортогонального (ортонормированного) базиса систему векторов:

a) $\{(1,-2,2,-3),\ (2,-3,2,4)\}$;

b) $\{(1,1,1,2),\ (1,2,3,-3)\}$;

c) $\left\{(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})\right\}$;

d) $\left\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})\right\}$.

1.4. Многочлены

$$P_0 = 1,\ P_k = \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2-1)^k\right],\ k \in \mathbb{N}$$

называются многочленами Лежандра.

a) Докажите, что многочлены Лежандра образуют ортогональный базис в евклидовом пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ со скалярным произведением

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

b) Найдите явный вид многочленов $P_k(x)$ для $k \leq 4$.

c) Докажите, что $\deg\ P_k(x) = k$. Найдите развернутое выражение по степеням x для $P_k(x)$ при всех k.

d) Найдите длину многочлена Лежандра $P_k(x)$.

e) Вычислите значение $P_k(1)$.

f) Докажите, что при применение процесса ортогонализации к базису $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ пространства $\mathbb{R}[x]_n$ получается базис, элементы которого лишь постоянным множителем отличаются от соответствующих многочленов Лежандра. Найдите эти множители.

1.5. Пусть K и M — произвольные подпространства конечномерного евклидова пространства E_n. Докажите:

a) $K \subset M \Leftrightarrow M^\perp \subset K^\perp$;

b) $(K^\perp)^\perp = K$;

c) $(K + M)^\perp = K^\perp \bigcap M^\perp$;

d) $(\mathrm{K} \cap M)^\perp = K^\perp + M^\perp$.

1.6. Найдите базис ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов:

a) $\langle (1,0,2,1),\ (2,1,2,3),\ (0,1,-2,1) \rangle$;

b) $\langle (1,1,1,1),\ (-1,1,-1,1),\ (2,0,2,0) \rangle$.

1.7. Найдите уравнения, задающие ортогональное дополнение к пространству, заданному системой уравнений:

a) $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-2x_4=0, \\ 3x_1+x_2+4x_3-x_4=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1-x_2+11x_3-13x_4=0, \\ 4x_1+x_2+18x_3-23x_4=0. \end{cases}$

1.8. Найдите проекцию вектора $\overline{x}$ на подпространство L и ортогональную составляющую вектора $\overline{x}$:

a) $L=\langle(1,1,1,1),\ (1,2,2,-1),\ (1,0,0,3)\rangle$, $\overline{x}=(4,-1,-3,4)$;

b)$L=\langle(2,1,1,-1),\ (1,1,3,0),\ (1,2,8,1)\rangle$, $\overline{x}=(5,2,-2,2)$;

c) L задано системой уравнений

$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+2x_2+2x_3+x_4=0, \\ x_1+2x_2+2x_3-4x_4=0; \end{cases}$ $\overline{x}=(7,-4,-1,2)$.

Занятие 2. Понятие группы, понятие подгруппы. Таблица Кэли. Порядок элемента группы. Экспонента группы

2.1. Какие из указанных множеств являются группами относительно указанных операций:

a) $(A,+)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{R}_+$;

b) $(A,\cdot)$, где A — одно из множеств $\mathbb{N},\ \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ \mathbb{C},\ \mathbb{C}\backslash\{0\}$;

c) множество комплексных чисел с фиксированным модулем r относительно умножения;

d) множество комплексных корней *всех* степеней из единицы относительно умножения;

e) множество всех нечетных подстановок степени n относительно умножения подстановок;

f) (*четверная группа Клейна*) подмножество подстановок

$$V_4=\{\varepsilon,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$$

в S_4 относительно операции умножения подстановок;

g) множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно сложения;

h) множество матриц с фиксированным определителем d относительно умножения;

i) множество диагональных матриц с вещественными коэффициентами относительно сложения (умножения);

j) (*группа кватернионов*) множество матриц

$$\mathbb{H}=\left\{\pm1=\pm E,\pm i=\pm\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\pm j=\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\pm k=\pm\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

с комплексными коэффициентами относительно умножения.

2.2. Докажите, что во всякой группе

a) пересечение любого набора подгрупп является подгруппой;

b) если подгруппа C содержится в объединении подгрупп A и B, то либо $C\subseteq A$, либо $C\subseteq B$.

2.3. Докажите, что непустое подмножество H в группе G является подгруппой тогда и только тогда, когда для любых x и y из H $xy^{-1}\in H$.

2.4. Докажите, что *конечное* непустое подмножество в группе, замкнутое относительно групповой операции, является подгруппой.

2.5. Составьте таблицу Кэли для следующих конечных групп

a) V_4, b) S_3, c) D_4, d) $\mathbb{H}$.

По таблице сделайте вывод, является группа абелевой или нет.

2.6. Найдите порядок элемента указанной группы

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\in S_5$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}\in S_6$,

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\in\mathbb{C}^*$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\in\mathbb{C}^*$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in GL(4,\mathbb{R})$, f) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\in GL(2,\mathbb{C})$,

g) $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$, h) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$.

2.7. Докажите, что во всякой группе

a) элементы g и g^{-1} имеют одинаковый порядок;

b) элементы x и yxy^{-1} имеют одинаковый порядок;

c) элементы ab и ba имеют одинаковый порядок.

2.8. Найдите экспоненты следующих групп

a) V_4, b) S_3, c) $\mathbb{H}$, d) A_4, e) S_4.

2.9. Докажите, что если экспонента группы равна двум, то группа абелева.

2.10. Составьте диаграмму Хассе для подгрупп следующих групп

a) V_4, b) S_3, c) $\mathbb{H}$, d) D_4, e*) A_4, f*) S_4.

Занятие 3. Классы смежности. Фактор группа. Гомоморфизмы групп

3.1. Выпишите все левые и все правые смежные классы группы G по подгруппе H

a) $G = S_3,\ H =< (1)(23) >$;

b) $G = \mathbb{H},\ H =< -1 >$;

c) $G = D_4,\ H =< S_x >$, здесь S_x — симметрия относительно оси Ox;

d) $G = A_4,\ H =< (123)(4) >$.

Исходя из полученных результатов сделайте вывод, является ли подгруппа H нормальной в группе G или нет.

3.2. Докажите, что подгруппа H является нормальным делителем в группе G

a) $H = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},\ G = S_4$;

b) H — любая подгруппа в группе $\mathbb{H}$.

3.3. Докажите теорему Оре: пусть A и B — нормальные подгруппы в группе G, причем $A \cap B = \{e\}$. Тогда $xy = yx$ для любых $x \in A$ и $y \in B$.

3.4. Какие из отображений $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ являются гомоморфизмами групп

a) $f(z) = |z|$, b) $f(z) = 2|z|$, c) $f(z) = \frac{1}{|z|}$,

d) $f(z) = 1 + |z|$, e) $f(z) = |z|^2$, f) $f(z) = a,\ a \in \mathbb{R}^*$.

3.5. Сопоставим каждой матрице $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{C})$ дробно-линейное преобразование комплексной плоскости

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Докажите, что это соответствие является гомоморфизмом групп и найдите ядро этого гомоморфизма.

3.6. Докажите, что отображение $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ такое, что $\varphi(x) = e^{2\pi i x}$ для любого $x \in \mathbb{R}$ является гомоморфизмом групп. Найдите ядро и образ этого гомоморфизма.

3.7. Пусть $\varphi : G \to H$ — гомоморфизм групп, причем G — конечная группа. Пусть $\varphi(a) = b$, где $a \in G$. Докажите, что

a) $|\mathrm{Im}\,\varphi| \ \mid\ |G|$;

b) $\mathrm{ord}\, b \ \mid\ \mathrm{ord}\, a$.

3.8. Составьте таблицу Кэли для фактор группы G/H

a) $H = \{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\},\ G = A_4$,

b) $H =< S_0 >,\ G = D_4$,

здесь S_0 — центральная симметрия относительно начала координат.

Занятие 4. Конечные абелевы группы

4.1. Пусть $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ — гомоморфизм циклических групп. Докажите, что

a) гомоморфизм φ однозначно задается своим значением на произвольной образующей группы $\mathbb{Z}_n$,

b) элемент a группы $\mathbb{Z}_m$ является образом элемента, порождающего $\mathbb{Z}_n$, при некотором φ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ord} a \mid n$.

4.2. Используя результат задачи 4.1, опишите все гомоморфизмы следующих групп и выясните, какие из них являются моно-, эпи-, изоморфизмами:

a) $\varphi : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_{14}$, b) $\varphi : \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_8$,

c) $\varphi : \mathbb{Z}_{24} \to \mathbb{Z}_6$, d) $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{24}$.

4.3. Пользуясь теоремой о структуре конечной абелевой группы, найдите все с точностью до изоморфизма абелевы группы порядка

a) 8, b) 12, c) 16, d) 24, e) 36, f) 48, g) 900.

4.4. Изоморфны ли группы

a) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$,

b) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{24}$,

c) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{10}$?

4.5. Найдите все подгруппы порядков 2, 3 и 6 в нециклической абелевой группе порядка 12.

4.6. Опишите все конечные абелевы группы, в которых любая собственная подгруппа является циклической.

4.7. При каких условиях на натуральное число n существует ровно k классов изоморфных абелевых подгрупп порядка n; $k = 1, 2, 3, 4$?

Занятие 5. Порождающие элементы и определяющие соотношения

5.1. В группе S_4 определим подгруппу $H =< (12)(34), (1234) >$ системой образующих. Какой порядок имеет эта подгруппа? Перечислите все элементы H.

5.2. Найдите все двухэлементные множества, порождающие группы

a) S_3, b) $\mathbb{H}$, c) D_4.

Запишите определяющие соотношения для каждой пары.

5.3. Докажите теорему об образующих симметрической группы: группа S_n порождается

a) множеством всех транспозиций;

b) множеством всех транспозиций вида $(1, k)$, $k = 2, ..., n$;

c) множеством всех транспозиций вида $(k, k+1)$, $k = 1, ..., n-1$;

d) транспозицией $(1, 2)$ и полным циклом $(12...n)$.

5.4. Докажите, что A_5 порождается двумя подстановками (1)(254)(3) и (12345).

Занятие 6. Кольца и идеалы

6.1. Являются ли областями целостности следующие кольца

a) $\mathbb{Z}_3[x]$, b) $\mathbb{Z}_4[x]$, c) $C(\mathbb{R})$, d) $C[a, b]$?

6.2. Докажите, что конечная область целостности является полем.

6.3. Найдите все обратимые элементы и все делители нуля в кольцах

a) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, b) $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, c) $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, p — простое, d) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, e) $C[a, b]$.

6.4. Докажите, что пересечение любого семейства идеалов есть идеал кольца.

6.5. Докажите, что следующие множества являются идеалами в указанных кольцах

a) множество всех многочленов из кольца $k[x]$, где k — поле, имеющих корнем данный элемент $a \in k$;

b) множество I_S непрерывных функций из кольца $C[a, b]$, обращающихся в ноль на фиксированном подмножестве $S \subseteq [a, b]$.

6.6. Докажите, что коммутативное кольцо с единицей является полем тогда и только тогда, когда все его идеалы тривиальны.

6.7. Является ли указанное кольцо кольцом главных идеалов

a) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, b) $k[x, y]$, где k — поле, c) кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i] = \{m + in, m, n \in \mathbb{Z}\}$?

6.8. Являются ли отображения гомоморфизмами колец

a) $D : C^1[a,b] \to C[a,b]$, где $D(f) = f'$ для любой функции $f \in C^1[a,b]$;

b) $\varphi : A \to A/I$, где $\varphi(a) = [a]$ (A — произвольное кольцо, I — идеал A)?

В случае положительного ответа найдите ядро и образ гомоморфизма.

6.9. Пусть K — поле положительной характеристики p, $q = p^n$, $n \in \mathbb{N}$ — примарное число. Докажите, что отображение $\varphi_q : K \to K$ такое, что $\varphi_q(a) = a^q$, $\forall a \in K$, является мономорфизмом полей. Докажите также, что если K — конечное поле, то φ_q — *автоморфизм* поля K.

6.10. Докажите, что если $\varphi : A \to B$ — эпиморфизм колец и A — кольцо главных идеалов, то B — тоже кольцо главных идеалов.

6.11. Используя задачу 6.10, опишите все идеалы кольца

a) $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$, b) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$, c) $\mathbb{R}[x]/(x^2)$, d) $\mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^2+1)$.

6.12. Составьте таблицы Кэли для сложения и умножения в следующих фактор кольцах

a) $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+1)$, b) $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1)$, c) $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$, d) $\mathbb{F}_3[x]/(x^2-x+1)$.

Занятие 7. Элементы общей теории полей

7.1. Найдите минимальные многочлены данного элемента над указанным полем

a) $\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}$, b) $\sqrt[7]{5}$ над $\mathbb{Q}$, c) $2-3i$ над $\mathbb{R}$, d) $2-3i$ над $\mathbb{C}$,

e) $\sqrt[105]{9}$ над $\mathbb{Q}$, f) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ над $\mathbb{Q}$, g) $1+\sqrt{2}$ над $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, h) ζ_6 над $\mathbb{Q}$.

7.2. Докажите свойство мультипликативности степени расширения: если E/F и F/k — конечные расширения, то расширение E/k также является конечным, причем

$$[E:k] = [E:F] \cdot [F:k].$$

7.3. Найдите степень расширения $K(\alpha)/\mathbb{Q}$, где

a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \alpha = \sqrt{3}$, b) $K = \mathbb{Q}(i),\ \alpha = \sqrt{5}i$, c) $K = \mathbb{Q}(i),\ \alpha = \sqrt[4]{2}$.

Занятие 8. Конечные поля

8.1. Перечислите все подполя поля a) $GF(2^{36})$, b) $GF(3^{40})$. Составьте соответствующие диаграммы Хассе.

8.2. Решите уравнения в поле $\mathbb{F}_{11}$

a) $x^2+3x+7=0$, b) $x^2+5x+1=0$, c) $x^2+2x+3=0$, d) $x^2+3x+5=0$.

8.3. Пользуясь критерием Батлера, определите является ли данный многочлен неприводимым над указанным полем

a) $f(x) = x^4+x^2+1$ над $\mathbb{F}_2$, b) $f(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$ над $\mathbb{F}_2$, c) $f(x) = x^4+x^3+x+2$ над $\mathbb{F}_3$, d) $f(x) = x^3+x^2+x+1$ над $\mathbb{F}_3$.

8.4. Найдите экспоненту $O(f)$ неприводимого многочлена $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$

a) $f(x) = x^4+x^3+x^2+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$,

b) $f(x) = x^3+2x+2 \in \mathbb{F}_3[x]$.

Сделайте вывод о примитивности данных многочленов.

8.5. Найдите все неприводимые многочлены указанных степеней над данным полем. Выберите из них примитивные многочлены:

a) над полем $\mathbb{F}_2$ степеней 2, 3, 4 и 5;

b) над полем $\mathbb{F}_3$ степеней 2 и 3;

c) над полем $\mathbb{F}_5$ степени 2.

8.6. Используя результаты задачи 8.5, опишите все конечные поля $GF(q)$, где $q \le 32$, по следующей схеме: выберите простое подполе $\mathbb{F}_p$ в $GF(q)$, выберите примитивный многочлен $p(x)$ нужной степени в $\mathbb{F}_p[x]$, запишите таблицу, позволяющую выразить степени примитивного элемента в виде элементов фактор поля $\mathbb{F}_p[x]/(p(x))$.

8.7. Пользуясь результатом задачи 8.6, решите уравнения в поле $GF(27)$

a) $z^6-1=0$, b) $z^{39}-1=0$, c) $x^8+x^5-x^4-x^3-x+1=0$, d) $x^5+2x^4+x^3+x^2+1=0$.

8.8. Разложите многочлен $x^n - 1$ на неприводимые множители в $GF(q)[x]$:
a) $n = 15$, $q = 2$; b) $n = 15$, $q = 4$; c) $n = 23$, $q = 2$.

8.9. Сформулируйте алгоритм, позволяющий определить количество множителей и их степень в разложении двучлена $x^n - 1$ на неприводимые множители в $GF(q)[x]$.

Занятие 9. Примерный вариант контрольной работы

9.1. Постройте ортогональную систему векторов, эквивалентную данной $\overline{a_1} = (2, -1, 2, -3)$, $\overline{a_2} = (5, -2, 3, -6)$, $\overline{a_3} = (1, 0, 2, -1)$, $\overline{a_4} = (3, 1, -1, 1)$.

9.2. Подгруппа H в группе S_6 задана своими образующими $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Выпишите все элементы H. Заполните таблицу порядков элементов для H.

9.3. Найдите все корни многочленов a) $f(x) = x^{12} + 1$, b) $f(x) = x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + 1$ из $\mathbb{F}_2[x]$, принадлежащие полю $GF(16)$.