Ликбез по курсу "Алгебра" для студентов 1 курса, 1-ый семестр

лектор Панов А.Н.

1 Наиболее часто задаваемые вопросы

Вопрос 1.1. *Что такое перестановка и что такое знак перестановки?*

Ответ. Перестановка – это множество чисел $\{1, \ldots, n\}$, расположенное в определенном порядке. Обозначение $(i_1, \ldots, i_n)$. Говорят, что два числа в перестановке образуют инверсию, если большее стоит раньше меньшего. Говорят, что перестановка четная, если число инверсий в перестановке – четное. Соответственно, перестановка – нечетная, если число инверсий в перестановке – нечетное. По определению, знак перестановки равен 1, если перестановка четная; соответственно, знак равен -1, если перестановка нечетная.

Примечание. Если $N(i_1, \ldots, i_n)$ – число инверсий в перестановке, то знак перестановки равен

$$(-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)}.$$

Вопрос 1.2. *Дайте определение подстановки. Как определяется знак подстановки?*

Ответ. Подстановка – это биекция множества натуральных чисел от 1 до n на себя. Подстановка записывается в виде таблицы

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix},$$

в которой $(\alpha_1, , \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, , \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – перестановки и

$$\sigma(\alpha_1) = \beta_1, \ldots, \sigma(\alpha_n) = \beta_n.$$

Говорят, что подстановка σ – четная подстановка, если перестановки $(\alpha_1, , \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, , \beta_2, \ldots, \beta_n)$ имеют общую четность. Соответственно, σ – нечетная подстановка, если – разную четность. По определению, знак подстановки $\mathrm{sgn}(\sigma)$

равен 1, если подстановка четная; соответственно, равен -1, если подстановка нечетная.

Вопрос 1.3. *Дайте определение определителя n-го порядка.*

Ответ. Дана $n \times n$-матица $A = (a_{ij})$. Определителем матрицы A называют сумма

$$\det(A) = \sum (-1)^{N(i_1,\ldots,i_n)} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \ldots a_{n,i_n},$$

в которой суммирование производится по всем перестановкам $(i_1, \ldots, i_n)$. Равносильная форма определения: определитель – это сумма

$$\det(A) = \sum \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix} a_{\alpha_1,\beta_1} a_{\alpha_2,\beta_2} \ldots a_{\alpha_n,\beta_n},$$

в которой суммирование производится по всем подстановкам $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$.

Вопрос 1.4. *Сформулируйте свойства определителя.*

Ответ.
1) Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.
2) Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то он сменит знак.
3) Если в определителе две строки (столбца) равны, то определитель равен нулю.
4) Если определитель содержит нулевую строку (столбец), то он равен нулю.
5) Если строку определителя домножить на число, то определитель домножится на это же число.
6) Если строка в определителя есть сумма двух строк, то определитель есть сумма двух определителей.
7) Определитель не изменится, если к его строке прибавить линейную комбинацию других его строк.
8) Если строка определителя является линейной комбинацией других его строк, то определитель равен нулю.

Вопрос 1.5. *Что такое алгебраическое дополнение и дополнительный минор? Какая формула их связывает.*

Ответ. Представим определитель в виде суммы

$$\det(A) = C_{i1} + C_{i2} + \ldots + C_{in}, \tag{1}$$

где C_{ij} – сумма мономов содержащих элемент a_{ij}. Тогда $C_{ij} = a_{ij}A_{ij}$. Выражение A_{ij} называется алгебраическим дополнением к месту (i, j).
Дополнительный минор к месту (i, j) – это определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (обозначается M_{ij}).

Имеет место формула, связывающая алгебраические дополнения и дополнительные миноры:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{2}$$

Вопрос 1.6. *Напишите формулу разложения определителя по строке (столбцу).*

Ответ. Подставляя (2) в (1) получаем формулу разложения определителя по i-ой строке:

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}. \tag{3}$$

Аналогично, имеет место формула разложения определителя по j-му столбцу:

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}. \tag{4}$$

С использованием знака суммы формулы (3) и (4) имеют вид:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \qquad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

Вопрос 1.7. *Что такое минор матрицы? Сформулируйте теорему Лапласа.*

Ответ. Минор матрицы – это определитель, лежащий на пересечении выделенных строк и столбцов. Если выделена система строк $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и столбцов $\{j_1, \ldots, j_k\}$, то соответствующий минор обозначается

$$M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}.$$

Для квадратных матриц определяется также дополнительный минор. Дополнительный минор – это определитель, который получается после вычеркивания выделенных строк и столбцов. Обозначается

$$\overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}.$$

Зафиксируем в определителе систему строк $\{i_1, \ldots, i_k\}$. Имеет место формула Лапласа, обобщающая формулу разложения определителя по строке:

$$\det(A) = \sum (-1)^{i+j} M_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k} \overline{M}_{i_1,\ldots,i_k}^{j_1,\ldots,j_k}, \tag{5}$$

где $i = i_1 + \ldots + i_k$ и $j = j_1 \ldots + j_k$, суммирование производится по всем наборам k столбцов $j_1 < \ldots < j_k$.

Вопрос 1.8. *Напишите формулы Крамера.*

Ответ. Дана система n линейных уравнений от n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{6}$$

Пусть Δ – определитель матрицы $A = (a_{ij})$ и $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ система определителей, которые получаются из Δ заменой 1-го (соответственно, 2-го, ..., n-го) столбца на столбец свободных членов. Теорема Крамера утверждает, что если $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений (6) имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \ldots \quad , x_1 = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Вопрос 1.9. *Какая система векторов называется линейно независимой?*

Ответ. Система векторов $S = \{\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k\}$ из координатного n-мерного пространства K^n называется линейно независимой, если равенство

$$\alpha_1 \overline{f}_1 + \ldots + \alpha_k \overline{f}_k = \overline{0} \tag{7}$$

выполняется только в случае $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.
Примечание. Здесь слово "только" не может быть опущено.

Вопрос 1.10. *Какая система векторов называется линейно зависимой?*

Ответ. Система векторов $S = \{\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k\}$ называется линейно зависимой, если существует набор чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, таких, что не все α_i равны нулю и $\alpha_1 \overline{f}_1 + \ldots + \alpha_k \overline{f}_k = \overline{0}$.

Примечание. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда в ней существует вектор, который линейно выражается через другие векторы этой системы (см.лекции).

Вопрос 1.11. *Дайте определение базиса n-мерного координатного пространства.*

Ответ. Система $B \subset K^n$ называется базисом n-мерного координатного пространства K^n, если
1) система B линейно независима,
2) любой вектор из K^n линейно выражается через B.
Примечание. В лекциях доказывалось, что базис – это в точности максимальное линейно независимое подмножество в K^n. Число векторов во всяком базисе пространства K^n равно n.

Вопрос 1.12. *Что такое база системы векторов?*

Ответ. Дана система векторов $S \subset K^n$ и подсистема $B \subset S$. Говорят, что B база системы S, если
1) система B линейно независима,
2) любой вектор из S линейно выражается через B.
Примечание. В лекциях доказывалось, что база в S – это в точности максимальное линейно независимое подмножество в S. Во всякой базе системы векторов одинаковое число векторов (см. Следствие из теоремы о линейной зависимости). Именно этот факт дает возможность ввести понятие ранга системы векторов.

Вопрос 1.13. *Что такое ранг системы векторов?*

Ответ. Ранг системы векторов – это число векторов во всякой базе этой системы.
Вопрос 1.14. *Сформулируйте теорему о ранге матрицы.*
Ответ. По определению, ранг матрицы – это ранг системы строк этой матрицы.

Теорема. Ранг матрицы равен наивысшему порядку отличного от нуля минора.

Следствие 1. Ранг системы строк любой матрицы равен рангу системы ее столбцов.

Следствие 2. Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда система его строк (столбцов) линейно зависима.

Следствие 3. Система однородных линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A) = 0$.

Вопрос 1.15. *Дайте определение элементарных преобразований матрицы и эквивалентности матриц.*

Ответ. Элементарные преобразования бывают 1-го и 2-го рода:

1-го рода. Прибавление к строке другой строки домноженной на произвольное число. Аналогично для столбцов.

2-го рода. Умножение строки (столбца) на произвольное число, отличное от нуля.

Говорят, что две матрицы эквивалентны (обозначение $A \sim B$), если одну можно получить из другой по цепочке элементарных преобразований.

Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы. Это дает возможность вычислить ранг матрицы, упрощая ее элементарными преобразованиями.

Вопрос 1.16. *Что такое фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений?*

Ответ. Система линейных уравнений называется однородной, если в ней все свободные члены равны нулю. Система решений $B = \{\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k\}$ однородной системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. \tag{9}$$

называется фундаментальной системой решений (далее ФСР), если

1) система B линейно независима,

2) любое решение системы (9) линейно выражается через B.

То есть если B есть ФСР, то любое решение системы (9) имеет вид $\overline{f} = \alpha_1\overline{f}_1 + \ldots + \alpha_k\overline{f}_k$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ – любые числа. Заметим, что $k = n - r$, где r – ранг матрицы $A = (a_{ij})$.

Вопрос 1.17. *Как записывается решение системы линейных уравнений в векторной форме?*

Ответ. Рассмотрим систему линейных уравнений общего вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{10}$$

Составим соответствующую однородную систему линейных уравнений (для краткости будем называть ее *приведенной* к (10)):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{11}$$

Любое решение $\overline{f}$ системы линейных уравнений (10) записывается в виде $\overline{f} = \overline{f}_0 + \alpha_1\overline{f}_1 + \ldots + \alpha_k\overline{f}_k$, где $\overline{f}_0$ - частное решение (10), а $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k$ – ФСР приведенной системы линейных уравнений (11).

Вопрос 1.18. *Напишите формулу произведения матриц.*
Ответ. Дана $m \times n$-матрица $A = (a_{ij})$, $n \times k$-матрица $B = (b_{ij})$. Тогда общий элемент матрицы $C = (c_{ij}) = AB$, записывается в виде

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}. \tag{12}$$

С использованием знака суммы формула (12) принимает вид

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}.$$

Вопрос 1.19. *Что такое обратная матрица? Какие матрицы имеют обратную? Как найти обратную матрицу?*
Ответ. Матрица B называется обратной к матрице A, если $AB = BA = E$. Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда $\det(A) \neq 0$. Обратная матрица $B = (b_{ij})$ находятся единственным образом по формуле

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det(A)}.$$

Учитывая формулу (2), получаем

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det(A)}.$$

Вопрос 1.20. *Дайте определение кольца и поля. Приведите примеры колец и полей.*

Ответ. Кольцом называет множество A с двумя операциями $x, y \mapsto x + y$ (сумма) и $x, y \mapsto xy$ (произведение), удовлетворяющих следующим аксиомам:
1) $x + y = y + x$ – коммутативность сложения;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ – ассоциативность сложения;
3) существует нулевой элемент 0, такой, что $x + 0 = x$ для любого $x \in A$;
4) для любого $x \in A$ существует противоположный элемент $-x$, такой, что $x + (-x) = 0$;
5) $x(yz) = (xy)z$ – ассоциативность умножения;
6) $x(y + z) = xy + xz$ – дистрибутивность.

Кольцо называется коммутативным, если выполняется закон коммутативности умножения: $xy = yx$ для любых $x, y \in A$. Говорят, что A – кольцо с единицей, если существует элемент 1, такой, что $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для любого $x \in A$.

Полем называют коммутативное кольцо с единицей, в котором для любого $x \neq 0$ существует элемент x^{-1} (обратный элемент), такой, что $x \cdot x^{-1} = 1$.

Примерами полей являются: поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Примерами колец являются перечисленные поля, а также кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$, кольцо многочленов $K[x]$, кольцо $n \times n$-матриц, кольцо последовательностей, и т.д.