ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Занятие 1. Основные алгебраические структуры

1.1. Является ли операция $*$ на множестве A ассоциативной, если
a) $A = \mathbb{N},\ x * y = x^y$; b) $A = \mathbb{N},\ x * y = \text{НОД}(x, y)$;
c) $A = \mathbb{N},\ x * y = 2xy$; d) $A = \mathbb{Z},\ x * y = x^2 + y^2$;
e) $A = \mathbb{R},\ x * y = \sin x \cdot \sin y$; f) $A = \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x * y = x \cdot y^{x/|x|}$?

1.2. Составьте таблицу Кэли для следующих бинарных операций на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:
a) $a * b = \min\{2a, b\}$,
b) $a * b = a + b - \max\{a, b\}$.

По таблице определите, является ли эта операция коммутативной, имеет ли она нейтральный элемент.

1.3. Являются ли группами:
a) множество всех вещественных чисел, отличных от -1, относительно умножения

$$x * y = x + y + xy;$$

b) множество действительных чисел промежутка $[0, 1)$ с операцией $*$, где $a * b$ — дробная часть числа $a + b$;
c) множество всех подмножеств множества $M \neq \emptyset$ относительно операции $*$, где

$$A * B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)?$$

1.4. Являются ли кольцами (полями) относительно операций сложения и умножения чисел множества:
a) $\{a + b\sqrt{2}\ : a, b \in \mathbb{Z}\}$;
b) $\{a + b\sqrt{2}\ : a, b \in \mathbb{Q}\}$;
c) $\{a + b\sqrt[3]{2}\ : a, b \in \mathbb{Q}\}$?

1.5. Является ли кольцом (полем) множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ с операциями:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);\ (a, b) \cdot (c, d) = (ad + bc, bd)\ ?$$

1.6. На множестве классов вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ введем две бинарные операции — сложение и умножение:

$$[a]_m + [b]_m := [a + b]_m,\ [a]_m \cdot [b]_m := [a \cdot b]_m,\ \forall\ [a]_m, [b]_m \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Докажите, что эти операции определены корректно.

1.7. Составьте таблицы Кэли для операций сложения и умножения на множестве
a) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, b) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Найдите все пары противоположных друг другу элементов и все пары обратных друг другу элементов.

Занятие 2. Перестановки и подстановки

2.1. Докажите, что от любой перестановки n-элементного множества можно перейти к любой другой перестановке посредством последовательного выполнения нескольких транспозиций.

Выпишите транспозиции, посредством которых от перестановки 1, 2, 4, 3, 5 можно перейти к перестановке 2, 5, 3, 4, 1.

2.2. Определите число инверсий в перестановках:
a) $6, 3, 1, 2, 5, 4$; b) $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$; c) $2, 1, 7, 9, 8, 6, 3, 5, 4$; d) $9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$;

e) $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$;
f) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, 1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1$;
g) $3, 6, 9, ..., 3n, 2, 5, 8, ..., 3n-1, 1, 4, 7, ..., 3n-2$;
h) $2, 5, 8, ..., 3n-1, 3, 6, 9, ..., 3n, 1, 4, 7, ..., 3n-2$;
i) $2, 5, 8, ..., 3n-1, 1, 4, 7, ..., 3n-2, 3, 6, 9, ..., 3n$;
j) $3n, 1, 4, 7, ..., 3n-2, 2, 5, 8, ..., 3n-1, 3, 6, 9, ..., 3n-3$.

2.3. Подберите i и k так, чтобы перестановка

a) 1, 2, 7, 4, i, 5, 6, k, 9 была четной; b) 1, i, 2, 5, k, 4, 8, 9, 7 была нечетной.

2.4. Пусть в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ имеется k инверсий.
а) Сколько инверсий в перестановке $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$?
б) Какое наибольшее значение может принимать k?

2.5*. Докажите, что число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ равно минимальному числу транспозиций типа $(q, q+1)$, $1 \le q \le n-1$, переводящих данную перестановку в натуральное расположение 1, 2,. . ., n.

2.6. Составьте таблицу умножения (таблицу Кэли) для множества S_3.

2.7. Для подстановок σ и τ найдите $\sigma \circ \tau$ и $\tau \circ \sigma$.
a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;
b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$;
d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2.8. Найдите натуральную степень подстановки

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$;
c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{98}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{102}$;
e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}^{100}$;
f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{150}$.

2.9. Следующие подстановки разложите в произведение независимых циклов и по декременту определите их четность.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;
e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & ... & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & ... & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & ... & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & ... & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.10. Перемножьте перестановки и результат запишите в виде таблицы:

a) $[(135)(2467)]\cdot[(147)(2356)]$; b) $[(13)(57)(246)]\cdot[(135)(24)(67)]$.

2.11*. Докажите, что всякая подстановка $\sigma \in S_n$ может быть представлена как произведение транспозиций вида:

a) $(12), (13), \ldots, (1n)$; b) $(12), (23), \ldots, (n-1\ n)$.

Занятие 3. Методы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса и метод Крамера

3.1. Следующие системы линейных уравнений решите, пользуясь методом Крамера.

a) $\begin{cases} 4x + 7y + 13 = 0; \\ 5x + 8y + 14 = 0. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \bar{2}x - y = \bar{1}; \\ x + \bar{2}y = \bar{2} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) $\begin{cases} \bar{3}x - \bar{2}y = \bar{3}; \\ \bar{3}x + \bar{4}y = \bar{2} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. d) $\begin{cases} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y - \cos\beta = 0; \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y - \sin\beta = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = -4; \\ 6x - 2y + 3z = -1; \\ 5x - 3y + 2z = -3. \end{cases}$ f) $\begin{cases} \bar{3}x - \bar{2}y + z = \bar{1}; \\ -x + \bar{2}y + \bar{4}z = \bar{3}; \\ \bar{4}x - \bar{2}y + \bar{2}z = \bar{4} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

g) $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 2 = 0; \\ -\frac{2y}{b} + \frac{3z}{c} - 1 = 0; \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0. \end{cases}$ h) $\begin{cases} 4bcx + acy - 2abz = 0; \\ 5bcx + 3acy - 4abz + abc = 0; \\ 3bcx + 2acy - abz - 4abc = 0, \\ \text{где } abc \neq 0. \end{cases}$

3.2. Следующие системы линейных уравнений решите методом Гаусса.

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3; \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3; \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 - 7 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = \bar{0}; \\ x_1 + x_3 + x_4 = \bar{1}; \\ x_1 + x_2 + x_4 = \bar{0}; \\ x_1 + x_2 + x_3 = \bar{0} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. d) $\begin{cases} \bar{2}x_1 - x_2 + x_3 + \bar{2}x_4 = \bar{2}; \\ x_1 - \bar{2}x_2 - \bar{2}x_3 + x_4 = \bar{1}; \\ x_1 - x_3 + \bar{2}x_4 = \bar{0}; \\ \bar{2}x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = \bar{1} \end{cases}$ над $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 - 6 = 0; \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 - 2 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 6 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 + 7 = 0. \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4; \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3; \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$

Занятие 4. Понятие определителя

4.1. Выясните, какие из следующих произведений входят в определители соответствующих порядков и с какими знаками:

a) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; b) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$;

c) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; d) $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$;

e) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$; f) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$.

4.2. Подберите значения i, j и k так, чтобы указанные произведения входили в определитель соответствующего порядка с указанным знаком:

a) $a_{1i}a_{j2}a_{4k}a_{25}a_{53}$, знак плюс; b) $a_{6i}a_{j5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$, знак минус;

c) $a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$, знак минус; d) $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$, знак плюс.

4.3. Выпишите все слагаемые, входящие в определитель 5-го порядка и имеющие вид $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$, определив их знаки.

4.4. Найдите все члены определителя 4-го порядка, содержащие множитель a_{32} и входящие в определитель со знаком минус.

4.5. Найдите все члены определителя

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$$

содержащие x^4 и x^3.

4.6. Пользуясь только определением, вычислите определители:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{d)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{e)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}; \qquad \text{f)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.7. Вычислите определитель, у которого все элементы главной диагонали равны 1, элементы столбца с номером j равны a_1, a_2,..., a_{j-1}, a_{j+1},..., a_n, а остальные элементы равны 0.

4.8. Представьте определитель

$$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}$$

в виде многочлена, расположенного по убывающим степеням t.

4.9. Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \in S_n$ и A — квадратная матрица порядка n с элементами a_{st}, причем

$$a_{st} = \begin{cases} 1, & \text{если } t = j_s, \\ 0, & \text{если } t \neq j_s. \end{cases}$$

Докажите, что $\det A = \operatorname{sgn}\sigma$.

Занятие 5. Свойства определителей. Разложение определителя по строке и столбцу

5.1. Как изменится определитель порядка n, если:

а) у всех его элементов изменить знак на противоположный;

б) каждый его элемент a_{ij} умножить на число c^{i-j}, где $c \neq 0$;

в) каждый его элемент заменить элементом, симметричным относительно побочной диагонали (транспонировать определитель относительно побочной диагонали);

г) его первый столбец поставить на последнее место, а остальные сдвинуть влево, сохраняя их расположение;

д) его строки записать в обратном порядке;

е) из каждой строки, кроме последней, вычесть следующую за ней строку, а из последней вычесть прежнюю первую строку?

5.2. Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

5.3. Не развертывая определитель, докажите следующие тождества:

a) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0;$ b) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0;$

c) $\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix} = 0;$ d) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix} = 0;$

e) $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0;$

g) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$

h) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

5.4. Докажите, что если все элементы одной строки (одного столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

5.5. Вычислите определители, разложив их по по элементам строки (столбца), содержащей буквы.

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \text{ b)} \begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}, \text{ c)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ d)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}.$$

5.6. Используя свойства определителей, а также разложение определителя по строке и столбцу, докажите следующие тождества:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b);$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b).$

Занятие 6. Вычисление определителей

6.1. Вычислите определители

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix}$,

g) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$, h) $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$, i) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$,

j) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$, k) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \end{vmatrix}$, l) $\begin{vmatrix} 1/3 & -5/2 & 2/5 & 3/2 \\ 3 & -12 & 21/5 & 15 \\ 2/3 & -9/2 & 4/5 & 5/2 \\ -1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \end{vmatrix}$,

m) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$, n) $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ b_5 & b_5 & b_5 & b_6 & 0 \\ b_7 & b_7 & b_7 & b_7 & b_8 \\ b_9 & b_9 & b_9 & b_9 & b_{10} \end{vmatrix}$.

6.2. Вычислите определители, пользуясь теоремой Лапласа, предварительно преобразовав их, если это необходимо:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \\ -6 & 4 & -9 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$,

$$
\text{g)}\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{h)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{i)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix},
$$

$$
\text{j)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{k)}\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{l)}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10 \end{vmatrix}.
$$

6.3. Вычислите следующие определители n-го порядка методом рекуррентных соотношений

$$
\text{a)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}, \quad \text{b)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}.
$$

6.4. Вычислите определители, пользуясь теоремой о значении определителя Вандермонда.

$$
\text{a)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}, \quad \text{b)}\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \dots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2n-1 & 2n-2 & \dots & n & 2n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix},
$$

$$
\text{c)}\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}, \quad \text{d)}\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \dots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \dots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix},
$$

$$
\text{e)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ 1 & 2^5 & 3^5 & \dots & n^5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}, \quad \text{f)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & \dots \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 & \dots \\ 1 & 7 & 7^2 & 7^3 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & (n-1)^3 & \dots \\ 1 & n & n^2 & n^3 & \dots \end{vmatrix}.
$$

Занятие 7. Примерный вариант контрольной работы по теме: "Определители"

7.1. Решите следующую систему линейных уравнений, используя а) метод Крамера, б) метод Гаусса,

$$
\begin{cases} \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 = \bar{3}; \\ x_1 + \bar{3}x_2 + \bar{2}x_3 = \bar{3}; \\ x_1 + \bar{2}x_2 + x_3 = \bar{2} \end{cases} \quad \text{над } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\ .
$$

7.2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} y & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & y & 0 & x \\ x & 7 & 1 & 2 & y \end{vmatrix}$, используя только определение детерминанта.

7.3. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, пользуясь теоремой Лапласа.

7.4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 5 & 11 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 16 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, пользуясь свойствами.

7.5. Восстановите последний столбец определителя и вычислите его, пользуясь теоремой о значении определителя Вандермонда,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & \dots \\ 1 & 6 & 6^2 & 6^3 & \dots \\ 1 & 8 & 8^2 & 8^3 & \dots \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 2n & (2n)^2 & (2n)^3 & \dots \end{vmatrix}.$$

Занятие 8. Арифметические пространства.

8.1. Пусть k — произвольное поле. Рассмотрим в арифметическом n-мерном пространстве k^n некоторую систему векторов. Из координат каждого вектора данной системы векторов выберем координаты, стоящие на определенных (одних и тех же для всех векторов) местах, и сохраним их порядок; полученную систему векторов будем называть *укороченной* для первой системы, а первую систему будем называть *удлиненной* для второй.

Докажите, что

а) укороченная система любой линейно зависимой системы векторов линейно зависима;

б) удлиненная система любой линейно независимой системы векторов линейно независима.

8.2. Докажите, что если векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы и вектор a_3 не выражается линейно через a_1 и a_2, то a_1 и a_2 различаются между собой лишь числовым множителем.

8.3. Найдите все значения $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых вектор $b \in \mathbb{R}^3$ линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 из $\mathbb{R}^3$:

a) $a_1 = (2, 3, 5),\ a_2 = (3, 7, 8),\ a_3 = (1, -6, 1),\ b = (7, -2, \lambda)$;

b) $a_1 = (4, 4, 3),\ a_2 = (7, 2, 1),\ a_3 = (4, 1, 6),\ b = (5, 9, \lambda)$;

c) $a_1 = (3, 2, 5),\ a_2 = (2, 4, 7),\ a_3 = (5, 6, \lambda),\ b = (1, 3, 5)$;

d) $a_1 = (3, 4, 2),\ a_2 = (6, 8, 7),\ a_3 = (15, 20, 11),\ b = (9, 12, \lambda)$.

8.4. Найдите все базы системы векторов:

a) $a_1 = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{0}),\ a_2 = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, -\bar{1}), a_3 = (\bar{3}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$ в $\mathbb{F}_5^4$;

b) $a_1 = (\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}),\ a_2 = (\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}), a_3 = (\bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}),\ a_4 = (\bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{0})$ в $\mathbb{F}_7^4$;

c) $a_1 = (2, 1, -3, 1),\ a_2 = (2, 2, -6, 2),\ a_3 = (6, 3, -9, 3),\ a_4 = (1, 1, 1, 1)$ в $\mathbb{R}^4$,

d) $a_1 = (3, 2, 3),\ a_2 = (2, 3, 4),\ a_3 = (4, 3, 4),\ a_4 = (1, 1, 1)$ в $\mathbb{R}^3$.

8.5. Найдите какую-либо базу системы векторов в $\mathbb{R}^4$ и выразите через эту базу остальные векторы системы:

a) $a_1 = (5, 2, -3, 1),\ a_2 = (4, 1, -2, 3),\ a_3 = (1, 1, -1, -2),\ a_4 = (3, 4, -1, 2)$;

b) $a_1 = (2, -1, 3, 5),\ a_2 = (4, -3, 1, 3),\ a_3 = (3, -2, 3, 4),\ a_4 = (4, -1, 15, 17),\ a_5 = (7, -6, -7, 0)$;

c) $a_1=(1,2,3,-4),\ a_2=(2,3,-4,1),\ a_3=(2,-5,8,-3),\ a_4=(5,26,-9,-12),\ a_5=(3,-4,1,2)$.

8.6. В каком случае система векторов обладает единственной базой?

8.7*. Пусть k — конечное поле, состоящее из q элементов. Найдите количество линейно независимых систем векторов в k^n, состоящих из r векторов.

Занятие 9. Ранг матрицы и методы его вычисления

9.1. Пусть $A\in \mathrm{Mat}(m\times n,k),\ B\in \mathrm{Mat}(m\times l,k)$, k — произвольное поле. Докажите, что если ранг матрицы A не меняется при приписывании к ней любого столбца матрицы B, то он не меняется при приписывании к матрице A всех столбцов матрицы B.

9.2. Пусть $A\in \mathrm{Mat}(m\times n,k),\ B\in \mathrm{Mat}(m\times l,k)$, k — произвольное поле. Докажите, что ранг матрицы $(A\,|B\,)$, полученной приписыванием к матрице A матрицы B, не превосходит суммы рангов матриц A и B.

9.3. Найдите ранг следующих матриц методом окаймления миноров:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

9.4. Вычислите ранг следующих матриц с помощью элементарых преобразований:

a) $\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 47 & -67 & 35 & 201 & 156\\ 26 & 98 & 23 & -294 & 86\\ 16 & -428 & 1 & 1284 & 52 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38\\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80\\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118\\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39\\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50\\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11\\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55\\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$.

9.5. Найдите ранг следующих матриц при различных значениях параметра λ :

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4\\ \lambda & 4 & 10 & 1\\ 1 & 7 & 17 & 3\\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix};\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.6. Докажите, что если ранг матрицы равен r, то минор, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и линейно независимых столбцов, отличен от нуля.

Занятие 10. Однородные системы линейных уравнений

10.1. Пусть A и B — матрицы одинаковых размеров, причем для однородных систем линейных уравнений с матрицами A и B одна и та же система векторов является фундаментальной системой решений. Докажите, что от матрицы A можно перейти к матрице B элементарными преобразованиями строк метода Гаусса.

10.2. Для следующих однородных систем линейных уравнений найдите какую-нибудь фундаментальную систему решений и общее решение системы:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0; \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0; \\ x_2 - x_4 = 0; \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0; \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0; \\ -x_3 + x_5 = 0; \\ -x_4 + x_6 = 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0; \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0; \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0; \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0; \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0; \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0; \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases}$ h) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0; \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

10.3. Найдите все решения следующих систем линейных уравнений:

a) $\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = \bar{0}; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = \bar{0}; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \bar{0}; \\ x_4 + x_6 = \bar{0}; \\ x_2 + x_3 + x_4 = \bar{0}; \\ x_1 + x_5 + x_6 = \bar{0} \end{cases}$ над $\mathbb{F}_2$; b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = \bar{0}; \\ -x_1 + x_3 + x_4 = \bar{0}; \\ \bar{2}x_1 + x_2 - x_4 + \bar{2}x_5 = \bar{0}; \\ -x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = \bar{0}; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = \bar{0} \end{cases}$ над $\mathbb{F}_3$.

10.4. Сколько решений может иметь однородная система из $n-1$ линейных уравнений с n неизвестными над полем $\mathbb{F}_2$?

10.5. Пусть k — произвольное поле. Предложите и обоснуйте метод, позволяющий для любой линейно независимой системы векторов a_1, $a_2, \ldots,$ a_m из k^n найти однородную систему линейных уравнений, для которой векторы a_1, $a_2, \ldots,$ a_m составляют ее фундаментальную систему решений.

Найдите какую-нибудь систему линейных уравнений над полем k, со следующей фундаментальной системой решений:

a) $k = \mathbb{R}$, $a_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $a_2 = (5, 4, 3, 2, 1)$;

b) $k = \mathbb{F}_5$, $a_1 = (\bar{2}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{3})$.

10.6*. Сколько фундаментальных систем решений имеет однородная система из m линейных уравнений с n неизвестными над полем k, если ранг матрицы этой системы равен r?

Занятие 11. Неоднородные системы линейных уравнений

11.1. Назовем линейное уравнение с неизвестными x_1, $x_2, \ldots,$ x_n *следствием совместной системы линейных уравнений* с теми же неизвестными, если ему удовлетворяют все решения этой системы. Докажите, что уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

является следствием некоторой системы линейных уравнений тогда и только тогда, когда вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b)$ является линейной комбинацией строк расширенной матрицы этой системы.

11.2. Приведите примеры систем линейных уравнений, в которых одна из переменных:
a) не может быть включена ни в какую систему свободных переменных;
b) входит в любую систему свободных переменных;
c) входит только в одну систему свободных переменных.

11.3. Пусть $\overline{a}$ — решение неоднородной системы линейных уравнений, а $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ — фундаментальная система решений для однородной системы линейных уравнений, соответствующей данной неоднородной. Докажите, что система векторов $\overline{a}, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$ является линейно независимой.

11.4. Решите следующие системы линейных уравнений:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6; \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1; \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2; \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases} \qquad \text{d)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2; \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9; \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1; \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7; \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2; \end{cases} \qquad \text{f)} \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1; \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4; \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5; \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11; \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6; \end{cases} \qquad \text{h)} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

11.5. Найдите все решения следующих систем линейных уравнений:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 - x_3 = \bar{1}; \\ x_2 - x_4 = \bar{2}; \\ \bar{2}x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = \bar{1}. \end{cases} \text{над } \mathbb{F}_3; \quad \text{b)} \begin{cases} \bar{2}x_1 + \bar{3}x_2 + x_3 = \bar{2}; \\ x_1 + x_2 - x_3 = \bar{3}; \\ x_1 + x_3 = \bar{2}. \end{cases} \text{над } \mathbb{F}_5.$$

11.6. Сколько решений может иметь система из $n-1$ линейных уравнений с n неизвестными над конечным полем из q элементов?

11.7. Пусть k — произвольное поле. Докажите, что для любой линейно независимой системы векторов $\overline{a}_0$, $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2, \ldots$, $\overline{a}_m$ в k^n найдется неоднородная система линейных уравнений с n неизвестными, такая что всякое решение этой системы имеет вид

$$\overline{a}_0 + c_1\overline{a}_1 + c_2\overline{a}_2 + \ldots + c_m\overline{a}_m,\ c_i \in k, i = \overline{1, m}.$$

Занятие 12. Алгебра матриц

12.1. Выполните действия с матрицами:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

h) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

i) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$;

j) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12.2. Найдите указанные натуральные степени квадратных матриц:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; e) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$; f) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

12.3. Докажите следующие свойства матриц размера $m \times n$ с элементами из поля k :

a) $\mathrm{rk}\ (A+B) \le \mathrm{rk}A + \mathrm{rk}B$;

b) всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

12.4. Докажите, что всякую матрицу A размера $m \times n$ ранга один с элементами из произвольного поля k можно представить в виде $A = {}^tB \cdot C$, где $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \in k^m$, а $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in k^n$.

12.5. Матрицы E_{ij} произвольного размера, у которых на пересечении i-й строки j-го столбца стоит единица поля k, а остальные элементы равны нулю, называются *матричными единицами.*

a) Докажите, что $E_{ij} \cdot E_{pq} = \delta_{jp} E_{iq}$, где δ_{jp} — символ Кронекера.

b) Найдите $A \cdot E_{ij}$ для произвольной матрицы A.

c) Найдите $E_{ij} \cdot A$ для произвольной матрицы A.

d) Пусть A — квадратная матрица порядка n, причем $E_{ij} \cdot A = A \cdot E_{ij}$ для любой матричной единицы порядка n, тогда $A = \lambda E$, где $\lambda \in k$. Докажите.

e) Пусть A — квадратная матрица порядка n, причем $E_{ii} \cdot A = A \cdot E_{ii}$ для любого $i = \overline{1,n}$, тогда A — диагональная матрица. Докажите.

12.6. Докажите, что если A — невырожденная матрица порядка n с элементами из поля k, то

a) если $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, k)$, то $\mathrm{rk}\, B \cdot A = \mathrm{rk}\, B$;

b) если $C \in \mathrm{Mat}(n \times m, k)$, то $\mathrm{rk}\, A \cdot C = \mathrm{rk}\, C$.

12.7. Найдите обратные к следующим матрицам:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{e)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\text{f)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{g)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{h)} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{i)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{j)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{k)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

12.8. Решите матричные уравнения:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{b)}\ X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad \text{e)}\ X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{f)} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}; \quad \text{g)} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{h)}\ X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}; \quad \text{i)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Занятие 13. Примерный вариант контрольной работы по теме: "Ранг матрицы, системы линейных уравнений, алгебра матриц"

13.1. Выясните: является ли данная система линейных уравнений совместной

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2; \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$$

Если система совместна, то найдите ее общее решение, если несовместна, то найдите общее решение однородной системы линейных уравнений, соответствующей данной.

13.2. Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \bar{4}x_1 + x_2 + x_3 = \bar{4}; \\ x_1 + \bar{6}x_2 + x_3 = \bar{1}; \\ \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 = \bar{2} \end{cases}$$

над полем $\mathbb{F}_7$.

13.3. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(обратную матрицу найдите и с использованием присоединенной матрицы, и с помощью элементарных преобразований; сделайте проверку).

13.4. Найдите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 & 16 \\ 16 & 10 & 3 & 13 & 21 \\ 6 & 4 & \mathbf{t} & 5 & 9 \\ 13 & 7 & 3 & 10 & 12 \\ 8 & 2 & 13 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

при различных значениях параметра.

Занятие 14. Операции над комплексными числами в алгебраической форме записи

14.1. Вычислите:

a) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; b) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$; c) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

d) $\dfrac{(3-i)(1+4i)}{(2-i)}$; e) $(2+i)^3-(2-i)^3$; f) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; g) $\left(\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$.

14.2. Выясните, при каких условиях произведение двух комплексных чисел является чисто мнимым числом.

14.3. Найдите вещественные значения неизвестных, удовлетворяющих уравнениям:

a) $(2+i)X+(1+2i)Y = 1-4i$; b) $(3+2i)X+(1+3i)Y = 4-9i$; c) $(1+2i)X+(3-5i)Y = 1-3i$.

14.4. Решите системы уравнений:

a) $\begin{cases} (1+i)x+(1-i)y = 1+i; \\ (1-i)x+(1+i)y = 1+3i. \end{cases}$ b) $\begin{cases} ix+(1+i)y = 2+2i; \\ 2ix+(3+2i)y = 5+3i. \end{cases}$

c) $\begin{cases} (1-i)x-3y = -i; \\ 2x-(3+3i)y = 3-i. \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-(2+i)y+i = 0; \\ (4-2i)x-5y+1+2i = 0. \end{cases}$

14.5. Вычислите:

a) $\sqrt{2i}$, b) $\sqrt{-8i}$, c) $\sqrt{3-4i}$, d) $\sqrt{-15+8i}$, e) $\sqrt{-11+60i}$,

f) $\sqrt{-8-6i}$, g) $\sqrt{2-3i}$, h) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$, i) $\sqrt{2-i\sqrt{12}}$.

14.6. Решите уравнения:

$$\text{a) } x^2-(2+i)x-1+7i=0,\ \text{b) } x^2-(3-2i)x+5-5i=0,\ \text{c) } x^2-(1+i)x+6+3i=0,$$
$$\text{d) } x^2-5x+4+10i=0,\quad \text{e) } x^4-3x^2+4=0,\quad \text{f) } x^4-30x^2+289=0.$$

14.7. Составьте формулу для решения биквадратного уравнения

$$x^4+px^2+q=0,$$

с вещественными коэффициентами для случая, когда $p^2-4q<0$.

Занятие 15. Изображение комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексного числа

15.1. Найдите тригонометрическую форму комплексных чисел:

$$\text{a) } 5,\ \ \text{b) } i,\ \ \text{c) } -2,\ \ \text{d) } -3i,\ \ \text{e) } 1+i,\ \ \text{f) } 1-i,\ \ \text{g) } 1+i\sqrt{3},\ \ \text{h) } -1+i\sqrt{3},\ \ \text{i) } 1-i\sqrt{3},$$
$$\text{j) } \sqrt{3}+i,\ \ \text{k) } -\sqrt{3}+i,\ \ \text{l) } -\sqrt{3}-i,\ \ \text{m) } 3+i\sqrt{3},\ \ \text{n) } 2+\sqrt{3}+i,\ \ \text{o) } 1-(2+\sqrt{3})i,$$
$$\text{p) } \frac{1+i\,\mathrm{tg}\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

15.2. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

$$\text{a) } \mathrm{Re}z>0,\quad \text{b) } \mathrm{Im}z\le 1,\quad \text{c) } |\mathrm{Re}z|<1,\quad \text{d) } |\mathrm{Im}z|<1, 0<\mathrm{Re}z<1,$$
$$\text{e) } |z|\le 1,\ \ \text{f) } |z-i|>1,\ \ \text{g) } 1<|z+i|\le 3,\ \ \text{h) } 0<\mathrm{arg}z<\pi/4,\ \ \text{i) } |\pi-\mathrm{arg}z|<\pi/4,$$
$$\text{j) } \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0,\ \text{k) } \mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\le 0,\ \text{l) } \mathrm{Re}\left(\frac{i}{z}\right)\le\frac{1}{2},\ \text{m) } 0<\arg\left(\frac{i-z}{i+z}\right)<\frac{\pi}{2},$$
$$\text{n) } \mathrm{Im}\left(z(1-i)\right)<1/2,\ \ \text{o) } \pi/4<\arg(z+i)<\pi/2,\ \ \text{p) } \mathrm{Re}z^4<\mathrm{Im}z^4,\quad \text{q) } |z|>1-\mathrm{Re}z.$$

15.3. Выполните действия:

$$\text{a) } (1+i\sqrt{3})(1+i)(\cos\varphi-i\sin\varphi),\ \text{b) } \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\psi-i\sin\psi)},\ \text{c) } \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{24},$$
$$\text{d) } (1+i)^{1000},\quad \text{e) } (1+i\sqrt{3})^{150},\quad \text{f) } (\sqrt{3}-i)^{30},\quad \text{g) } (2-\sqrt{3}+i)^{12},$$
$$\text{h) } \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12},\quad \text{i) } \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30},\quad \text{j) } \frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

15.4. Запишите в алгебраической форме элементы множества:

$$\text{a) } \sqrt[3]{i},\ \text{b) } \sqrt[4]{-4},\ \text{c) } \sqrt[6]{64},\ \text{d) } \sqrt[6]{-27},\ \text{e) } \sqrt[4]{8\sqrt{3}\cdot i-8},\ \text{f) } \sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})},\ \text{g) } \sqrt[3]{1+i},$$
$$\text{h) } \sqrt[3]{\frac{8+24i}{3-i}},\ \ \text{i) } \sqrt[3]{\frac{27-54i}{2+i}},\ \ \text{j) } \sqrt[4]{\frac{-18}{1+i\sqrt{3}}},\ \ \text{k) } \sqrt[4]{\frac{-32}{9(1-i\sqrt{3})}}.$$

15.5. Представьте в виде многочленов от $\sin x$ и $\cos x$ функции:

$$\text{a) } \sin 4x,\ \ \text{b) } \cos 4x,\ \ \text{c) } \sin 5x,\ \ \text{d) } \cos 5x,\ \ \text{e) } \sin 6x.$$

15.6. Докажите равенства ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\cos nx = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k} x \cdot \sin^{2k} x$; b) $\sin nx = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1} x \cdot \sin^{2k+1} x$.

15.7. Выразите через первые степени синуса и косинуса аргументов, кратных x, следующие функции:

a) $\sin^4 x$, b) $\cos^4 x$, c) $\sin^5 x$, d) $\cos^5 x$.

15.8*. Докажите равенства ($m \in \mathbb{N}$):

$$\text{a) } 2^{2m-1} \cos^{2m} x = \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + \frac{1}{2} C_{2m}^m;$$

$$\text{b) } 2^{2m} \cos^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2m+1-2k)x;$$

$$\text{c) } 2^{2m-1} \sin^{2m} x = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + \frac{1}{2} C_{2m}^m;$$

$$\text{d) } 2^{2m} \sin^{2m+1} x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin(2m+1-2k)x.$$

15.9. Вычислите суммы ($n \in \mathbb{N}$):

a) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$, b) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^6 + \dots$,

c) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$, d) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$,

e) $\cos x + C_n^1 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos(n+1)x$, f) $sinx + C_n^1 \sin 2x + \ldots + C_n^n \sin(n+1)x$,

g) $\cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$, h) $\sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$.

Занятие 16. Корни из единицы. Экспонента комплексного числа

16.1. Найдите все корни из единицы и выпишите все первообразные корни из единицы степеней:

a) 2, b) 3, c) 4, d) 6, e) 8, f) 12, g) 24.

16.2. Найдите двумя способами корни пятой степени из единицы и выразите в радикалах:

a) $\cos \frac{2\pi}{5}$, b) $\sin \frac{2\pi}{5}$, c) $\cos \frac{4\pi}{5}$, d) $\sin \frac{4\pi}{5}$.

16.3. Решите уравнения ($n \in \mathbb{N}$):

a) $(x+1)^n + (x-1)^n = 0$, b) $(x+1)^n - (x-1)^n = 0$, c) $(x+i)^n + (x-i)^n = 0$.

16.4. Найдите суммы:
a) всех корней степени n ($n \in \mathbb{N}$) из единицы;
b) $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$, где ε — произвольный корень n-й степени из единицы ($n \in \mathbb{N}$);
c) $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$, где ε — первообразный корень $2n$-й степени из единицы ($n \in \mathbb{N}$).
16.5. Пусть m и n взаимно простые натуральные числа. Докажите, что

a) все корни степени $m \cdot n$ из единицы получаются умножением корней степени m из единицы на корни степени n из единицы;

b) произведение первообразного корня степени m из единицы и первообразного корня степени n из единицы есть первообразный корень степени $m \cdot n$ из единицы, причем верно и обратное.
16.6. Вычислите:

$$\text{a) } e^{-\frac{\pi}{2}i}, \quad \text{b) } e^{\frac{2\pi}{3}i}, \quad \text{c) } \ln(-1), \quad \text{d) } \ln(1+i).$$

16.7. Решите уравнения:

$$\text{a) } e^{2z} + i\sqrt{3}e^z - 1 = 0, \quad \text{b) } e^{ix} + e^{-ix} = \sqrt{3}.$$

Занятие 17. Примерный вариант итоговой контрольной работы за первый семестр

17.1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.
17.2. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 9x_4 = -3; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 9x_4 = -2; \\ 6x_1 - 4x_3 - 9x_4 = -1; \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

17.3. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

над полем $\mathbb{F}_7$.
17.4. Дано комплексное число

$$z = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^7}{(1+i)^6} + \frac{(1 + i\sqrt{3})^7}{(1-i)^6}.$$

Запишите все элементы множества $\sqrt[4]{z}$ в алгебраической форме.