Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Механико-математический факультет
Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДЕНО
на совете механико-математического факультета
протокол № ___
от «___» ____________20___ г.

_____________ проф. С. Я. Новиков

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

кандидатского экзамена

по специальности
01.01.06. «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Программа одобрена на заседании
кафедры алгебры и геометрии
протокол № ___ от «___» __________ 20___ г.

Зав. кафедрой алгебры и геометрии
___________________проф. А. Н. Панов

Секретарь
__________________Р. М. Рудман

Самара
2011

Рабочая программа составлена на основании временных требований к основной образовательной программе послевузовского профессионального образования по отрасли 01.00.00. Физико-математические науки.

Составитель рабочей программы: заведующий кафедрой алгебры и геометрии СамГУ, д. ф.-м. н., профессор А.Н. Панов.

Рецензент: д. ф.-м. н., профессор В.Е.Воскресенский.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры алгебры и геометрии (протокол № ___ от «___» __________ 20___ г.)

Заведующий кафедрой
″____″ _____________ 20___ г. ______________ А.Н. Панов

СОГЛАСОВАНО

Декан механико-математического факультета
″____″ _____________ 20___ г. ______________ С.Я. Новиков

Начальник отдела послевузовского профессионального образования
″____″ _____________ 20___ г. ______________ Л.А. Круглова

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе, требования к уровню освоения содержания дисциплины

1.1. Цели и задачи изучения дисциплины

Временные требования к основной образовательной программе послевузовского профессионального образования по отрасли 01.00.00. Физико-математические науки включают следующий компонент: цикл ОПД.АФ.00 – образовательно-профессиональные дисциплины, а именно специальные дисциплины отрасли наук и научной специальности, в том числе дисциплины по выбору аспиранта. Дисциплины научной специализации включают следующие компоненты: алгебра, математическая логика, теория чисел и специальная часть.

Цель дисциплины – обеспечение фундаментальной подготовки аспирантов в одной из важнейших областей современной математики; изучение основ классической и современной алгебры, теории чисел, математической логики и теории алгоритмов, знакомство с историей развития дисциплин, а также подготовка научных кадров высшей квалификации, способных самостоятельно ставить и решать научные и производственные проблемы, а также проблемы образования в различных областях математики. и педагогической деятельности.

Задачи дисциплины:

- раскрыть роль дисциплины в фундаментальной и прикладной математике, изучить основные проблемы классической и современной алгебры, теории чисел, теории алгоритмов;
- изучить важнейшие алгебраические структуры в теории групп, линейной алгебре, теории Галуа, теории алгебр и групп Ли, теории представлений, в математической логике, теории алгоритмов, теории чисел, теории сравнений, теории модулярных форм и проч.

1.2. Требования к уровню подготовки аспиранта, завершившего изучение данной дисциплины

Аспиранты, завершившие изучение данной дисциплины, должны:

Иметь представление:

- о значении дисциплины, её месте в системе фундаментальных наук и роли в решении практических задач;
- о теоретических и методологических основах дисциплины.

Знать:

- базовую терминологию, относящуюся к классическим и современным разделам алгебры, математической логики и теории чисел, основные понятия и теоремы дисциплины;
- основные свойства важнейших алгебраических структур в теории групп, линейной алгебре, теории Галуа, теории алгебр и групп Ли, теории представлений, теории алгоритмов, теории чисел, теории модулярных форм, теории сравнений, и проч.

Уметь:

- самостоятельно ставить и решать научные проблемы в математике;
- самостоятельно ставить и решать проблемы образования в педагогической деятельности;
- применять известные понятия и теоремы дисциплины, а также формулировать новые понятия и доказывать новые теоремы при решении различных задач в области алгебры, теории чисел, математической логике и теории алгоритмов.

2. Содержание дисциплины

2.1. Объем дисциплины и виды учебной работы (в часах)

ОЧНАЯ И ЗАОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ

№	Наименование дисциплины	Всего часов	Виды аудиторных занятий		
			Лекции	Семи-нары	Самост. работа
	Алгебра				
1	Теоремы Силова о конечных группах	6	-		6
2	Простота знакопеременной группы **A**_n, n>=5, и группы SO(3,**R**) вращений трёхмерного пространства R^3	6			6
3	Конечно порождённые абелевы группы	4			4
4	Свободные группы. Теорема о подгруппах свободной группы. Определяющие соотношения группы диэдра **D**_n и группы кватернионов **Q**_8	6			6
5	Простота полного матричного кольца над телом. Тензорное произведение алгебр, простота тензорного произведения	6			6
6	Структурная теорема о простых алгебрах	6			6
7	Группа Брауэра поля. Теорема Фробениуса о конечномерных телах над полем **R**	6			6

8	Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта об универсальных обвёртывающих алгебрах конечномерных алгебр Ли	6			6
9	Нётеровы кольца и модули: теорема Гильберта о базисе	6			6
10	Теорема делимости в кольцах. Евклидовы кольца. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных	6			6
11	Нормальная форма линейного оператора в конечномерном комплексном пространстве	4			4
12	Канонический вид матрицы симметрической и кососимметрической билинейной формы, унитарного, ортогонального, симметрического и кососимметрического линейного оператора	4			4
13	Основы теории линейных представлений групп. Теорема Машке. Лемма Шура о гомоморфизмах неприводимых модулей. Соотношения ортогональности для характеров. Одномерные представления конечных групп	6			6
14	Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса	6			6
15	Алгебраические расширения полей: теорема о примитивном элементе, существование и единственность поля разложения многочлена	6			6
16	Конечные поля, их подполя и автоморфизмы. Коммутативность конечных тел	6			6
	Итого	**90**			

2.2 Программа-минимум кандидатского экзамена по специальности 01.01.06 Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Алгебра

1. Теоремы Силова о конечных группах. [6, "Группы", §9], [1, Глава 1, §8], [7, Глава 7, §4], [3, Глава 10, §4].
2. Простота знакопеременной группы **A**_n, n>=5, и группы SO(3,**R**) вращений трёхмерного пространства R^3. [8, Глава 1, §9], [3, Глава 10, §5], [1, Глава 1, §S11], [7, Глава 7, §3.3].
3. Конечно порождённые абелевы группы. [6, "Группы", §8], [7, Глава 7, §5].
4. Свободные группы. Теорема о подгруппах свободной группы. Определяющие соотношения группы диэдра **D**_n и группы кватернионов **Q**_8. [6, "Группы", §8], [7, Глава 7, §5].
5. Простота полного матричного кольца над телом. Тензорное произведение алгебр, простота тензорного произведения. [5, Глава 8, §7].
6. Структурная теорема о простых алгебрах. [5, Глава 8, §7].
7. Группа Брауэра поля. Теорема Фробениуса о конечномерных телах над полем **R**. [9, §12.5], [5, Глава 8, §9], [3, Глава 11, §6], [10].
8. Теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта об универсальных обвёртывающих алгебрах конечномерных алгебр Ли. [11, §17].

9. Нётеровы кольца и модули: теорема Гильберта о базисе. [2, §115].
10. Теорема делимости в кольцах. Евклидовы кольца. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных. [7, Глава 5, §3, Глава 9, §2].
11. Нормальная форма линейного оператора в конечномерном комплексном пространстве. [4, Глава 3], [7, Дополнение], [3, Глава 6, §4].
12. Канонический вид матрицы симметрической и кососимметрической билинейной формы, унитарного, ортогонального, симметрического и кососимметрического линейного оператора. [4, Глава 2], [3, Глава 5, §3].
13. Основы теории линейных представлений групп. Теорема Машке. Лемма Шура о гомоморфизмах неприводимых модулей. Соотношения ортогональности для характеров. Одномерные представления конечных групп. [12, Chapter 3], [7, Глава 8, §п.1, 2, 4, 5].
14. Индуцированные представления. Закон взаимности Фробениуса. [12, Chapter 4, §п.4.8-4.10].
15. Алгебраические расширения полей: теорема о примитивном элементе, существование и единственность поля разложения многочлена. [6, "Поля", §п.2-5].
16. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы. Коммутативность конечных тел. [6, "Поля", §п.4, 6], [7, Глава 9, §1, § 3], [5, Глава 8, §9].

Математическая логика и теория алгоритмов

1. Понятие алгоритма и его уточнения. Вычислимость по Тьюрингу и по Маркову, частично рекурсивные функции, рекурсивно перечислимые и рекурсивные множества. Тезис Чёрча. [17, гл.5, §§1-3]; [16, §§1-4,11,12]; [15, §35-37].
2. Универсальные вычислимые функции. Существование перечислимого неразрешимого множества. Алгоритмические проблемы. [17, гл.5, §3,4]; [16, §§5-6,12]
3. Построение полугруппы с неразрешимой проблемой распознавания равенства. [16, §13]
4. Логика высказываний, представимость булевых функций её формулами. Конъюктивные и дизъюнктивные нормальные формы. [15, §§1-6]; [18, гл.1]
5. Исчисление высказываний. Полнота и непротиворечивость. [17, гл.1, §4]; [18, гл.II, §§3-10]

6. Логика предикатов. Приведение формул логики предикатов к предваренной нормальной форме. Нормальная форма Сколема. [15, §15,16,20]; [17, гл.2, §10]; [18, гл.III, §§1-3,9, гл.IV, §14]
7. Исчисление предикатов. Непротиворечивость. Теорема о дедукции. [15, §18,22]; [17, гл.2, §§1-4]; [18, гл.IV, §§1-8]
8. Полнота исчисления предикатов. Теорема Мальцева о компактности. [17, гл.2, §5]; [18, гл.IV, §16]
9. Теорема Эрбрана. [15, §33]; [14, гл.III, §3,4]
10. Элементарные теории классов алгебраических систем, аксиоматизируемые классы. Критерий аксиоматизируемости. [15, §24,25]
11. Категоричные в данной мощности теории, теорема о полноте теории, категоричной в бесконечной мощности. [15, §29]
12. Разрешимые теории. Теория плотного линейного порядка. [17, гл.2, §12]
13. Формальная арифметика. Теорема о представимости вычислимых функций в формальной арифметике. [16, гл.3, §§1-3]
14. Теорема Гёделя о неполноте формальной арифметики. [17, гл.3, §4,5]
15. Неразрешимость алгоритмической проблемы выводимости для арифметики и логики предикатов. [17, гл.3, §6]; [15, §37,38]
16. Аксиоматическая теория множеств. Порядковые числа, принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора, континуум-гипотеза. [17, гл.4]

Теория чисел

1. Квадратичный закон взаимности. [2, гл.5, §1,2]
2. Первообразные корни и индексы. [20, гл.6]
3. Тригонометрические суммы. Модуль гауссовой суммы. [19, гл.1, §1,2]
4. Теорема Вейля о равномерном распределении. [21, гл.1, §2]
5. Модулярная группа и модулярные функции. Теорема о строении алгебры модулярных форм. [22, гл.7, §§1-3]
6. Представление целых чисел унимодулярными квадратичными формами. [22, гл.7, §§4-6]
7. Разложимые формы. Полные модули и их кольца множителей. [19, гл.2, §1,2]
8. Теорема Дирихле о единицах. [19, гл.2, §3,4]

9. Представление рациональных полей разложимыми формами. [19, гл.1, §5]
10. Неравенства Чебышева для функции $\pi(x)$. [23, гл.1, §4]
11. Дзета-функция Римана и её свойства. [23, гл.2, §1,2]; [21, гл.4]
12. Характеры Дирихле и их свойства. [20, гл.7]; [21, гл.8, §1]
13. Проблема Варинга. [21, гл.6, §1, гл.11]
14. Приближение вещественных чисел рациональными дробями. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными дробями. Примеры трансцендентных чисел. [23, гл.4, §2,3]
15. Трансцендентность чисел e и π. [23, гл.4, §4,5]

2.3. Лекционный курс

Лекции по данной дисциплине не предусмотрены.

2.4. Практические (семинарские) занятия

Практические (семинарские) занятия по данной дисциплине не предусмотрены.

2.5. Лабораторный практикум

Лабораторный практикум по данной дисциплине не предусмотрен.

3. Литература:

1. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
3. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2001.
4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, Добросвет, 1998.
5. Зуланке Р., Онищик А.Л. Алгебра и геометрия. В 3-х томах. Том 2. Модули и алгебры. М.: МЦНМО, 2008.
6. Клячко А.А. Теория Галуа. Куйбышев: КуГУ, 1982.
7. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
8. Курош А.Г. Теория групп. М.: Лань, 2005.
9. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
10. Серр Ж.-П. Алгебраические приложения когомологий групп. II. Теория простых алгебр. // Серр Ж.-Р. Собрание сочинений.
11. Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2003.
12. Etingof P. et al. Introduction to representation theory, arXiv: math.RT/0901.0827v1 (2009).

13. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
14. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Теория доказательств. М.: Наука, 1982.
15. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. Изд. 2-е. М.: Наука, 1987.
16. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965.
17. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Изд. 3-е. М.: Наука, 1984.
18. Новиков П.С. Элементы математической логики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973.
19. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.
20. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.
21. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
22. Серр Ж. Курс арифметики. М.: Мир, 1972.
23. Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. Введение в теорию чисел. Изд-во МГУ, 1984.
24. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
25. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.