Министерство образования и науки Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Механико-математический факультет
Кафедра алгебры и геометрии

УТВЕРЖДЕНО
на совете механико-математического факультета
протокол №___
от «___»____________20___г.

_____________С. Я. Новиков

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В АСПИРАНТУРУ

по специальности
01.01.06. «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Программа одобрена на заседании
кафедры алгебры и геометрии
протокол №___ от «___»__________20___г.

Зав. кафедрой алгебры и геометрии
_________________проф. А. Н. Панов

Секретарь
________________Р. М. Рудман

Самара
2011

Общая часть. Раздел 1

(*для всех специальностей*)

1. Понятие топологического пространства. Непрерывные отображения топологических пространств. Компактность в топологических пространствах.
2. Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применения.
3. Мера Лебега. Измеримые функции и их свойства. Теорема Д.Ф.Егорова. Интеграл Лебега и его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
4. Гильбертовы пространства. Ортогональная система функций. Полная система. Критерий полноты. Неравенство Бесселя. Сходимость рядов Фурье в гильбертовом пространстве. Равенство Парсеваля.
5. Линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Теоремы Фредгольма.
6. Линейные пространства и подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
7. Билинейные и квадратичные формы в линейных пространствах. Приведение квадратичных форм к нормальному виду. Закон инерции.
8. Линейные отображения в линейных пространствах. Собственные векторы и собственные значения. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.
9. Группа. Подгруппа. Порядок элемента. Циклические группы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизме.
10. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
11. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.
12. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка. Их классификация. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.
13. Элементарные функции комплексного переменного и связанные с ними конформные отображения. Дробно-линейные функции. Простейшие многозначные функции.
14. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитических функций.
15. Первая и вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна поверхности. Геодезические линии. Формула Эйлера. Гауссова кривизна поверхности.
16. Схема Бернулли. Теорема Муавра-Лапласа.
17. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

Общая часть. Раздел 2

(*специальность* 01.01.06 – *математическая логика*, *алгебра и теория чисел*)

Алгебра

1. Теоремы о гомоморфизмах групп. Классы сопряженных элементов. Центр и коммутант группы. Разрешимые группы. Теоремы Силова.
2. Представления групп. Лемма Шура. Теорема Машке.
3. Характеры представлений. Определяемость представления своим характером. Представления конечных групп.
4. Конечно порожденные модули над кольцом главных идеалов. Приложения к конечно порожденным абелевым группам и теории жордановой нормальной формы.
5. Задание групп образующими элементами и определяющими соотношениями. Алгоритмические проблемы для конечно определенных групп.
6. Поля алгебраических чисел.
7. Конечные поля.
8. Нетеровы кольца. Теорема Гильберта о базисе.

Теория чисел

1. Теорема о разложении целых чисел в произведение простых сомножителей. Важнейшие арифметические функции.
2. Сравнения и их свойства. Теоремы Эйлера и Ферма.
3. Сравнения с одной неизвестной величиной.
4. Сравнения второй степени. Квадратичный закон взаимности. Первообразные корни и индексы.
5. Сравнения высших степеней.

Специальная часть

Теория полей

Теорема о строении простых подполей. Теорема о структуре простых расширений. Конечные расширения. Теорема о мультипликативности степени. Алгебраичность конечного расширения. Нормальные расширения. Теорема о нормальности поля разложения многочлена. Сепарабельные и несепарабельные расширения. Критерий сепарабельности. Теорема о примитивном элементе.

Теория Галуа

Группа Галуа. Основная теорема теории Галуа. Циклические поля и двучленные уравнения. Поля деления круга: неразложимость уравнения деления круга, группа Галуа и степень кругового поля. Конечные поля.

Группы и алгебры Ли

1. Понятие алгебры Ли. Подалгебры Ли. Идеалы в алгебрах Ли. Классификация алгебр Ли малой размерности (1 и 2).
2. Понятие группы Ли. Касательная алгебра к группе Ли. Примеры (полная матричная группа Ли, ортогональная группа Ли, симплектическая группа Ли). Соответствие между подгруппами Ли (нормальными делителями) и подалгебрами Ли (идеалами в алгебре Ли).
3. Теорема Ли о классификации групп Ли с заданной алгеброй Ли. Гомоморфизмы групп и алгебр Ли. Классификация групп Ли малой размерности.
4. Экспонента на алгебре Ли.

Литература

1. Халмош П. Теория меры. Изд-во иностранной литературы, 1953. – 280 с.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I, часть II. М.: «Фазис», 1997. – 554 с.
3. Львовский С.М. Лекции по математическому анализу. М.: МЦНМО, 2009.
4. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. Серия: современные лекционные курсы. М.: МЦНМО, 2004. – 552 с.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. В трёх книгах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
6. Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002. – 544 с.
7. Городенцев А.Л. Лекции по алгебре. М.: МК НМУ, 1997.
8. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. 2002. - 148 с.
9. Клячко А.А. Теория Галуа. Куйбышев: Куйбышевский госуниверситет, 1982. – 92 с.
10. Фоменко А.Т., Мищенко А.Ф. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Факториал, 2000.
11. Дубровин БЛ., Новиков С.П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. -М.: Наука, 1986.
12. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. Издательство: Регулярная и хаотическая динамика, 2006.

13. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля, 2005. - 584 с.
14. Постников, М.М. Лекции по геометрии. М.: Наука, 1987.
15. Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М.: МЦНМО, 2005.
16. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.
17. Etingof P., et al. Inntroduction to representation theory, arXiv.
18. Виноградов И.М. Основы теории чисел. СПб: Лань, 2006. – 176 с.
19. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. Факториал Пресс; 2003. - 144 с.
20. Соболев С.Л., Некоторые применения математического анализа в математической физике. М: Наука, 1988. – 337 с.
21. Шапиро Д.А. Конспект лекций по математическим методам физики. Часть I, II.
22. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности. М.: Наука, 1988. – 45 с.
23. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов. Изд-во МГУ, 1992.
24. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Том 1, 2. Изд-во иностранной литературы, 1953. – 346 с.